C1 Assignment : Differential Calculus and Trigonometry

SINGLE CORRECT TYPE QUESTIONS

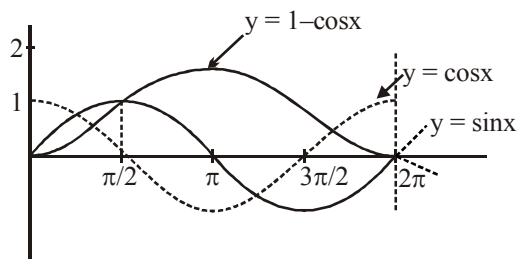
D05/1/001. A function f(x) = max (sinx, cosx, 1 – cosx) is non-derivable for n values of $x \in [0, 2\pi]$. Then the value of n is :

एक फलन f(x) = max (sinx, cosx, 1 – cosx), $x \in [0, 2\pi]$ के n मानों के लिए अवकलनीय नहीं है। तब n का मान होगा :

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Ans. C

Sol.



Clearly 3 sharp points.

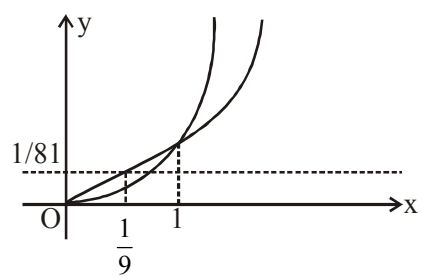
D05/1/002. If $f(x) = \max.\left(x^4, x^2, \frac{1}{81}\right) \forall x \in [0, \infty)$, then the sum of the square of reciprocal of all the values of x where f(x) is non-differentiable, is equal to :

यदि $f(x) = \max.\left(x^4, x^2, \frac{1}{81}\right) \forall x \in [0, \infty)$, x के मानों के व्युत्क्रम के वर्ग का योग, जहाँ f(x) अवकलनीय नहीं है, होगा :

(A) 1 (B) 81 (C) 82 (D) $\frac{82}{81}$

Ans. C

Sol.



$$f(x) = \text{maximum}\left(x^4, x^2, \frac{1}{81}\right) = \frac{1}{81} \qquad x \le \frac{1}{9}$$

$$= x^2 \qquad \frac{1}{9} < x < 1$$

$$= x^4 \qquad x \geq 1$$

f(x) is non differentiable at $x = \frac{1}{9}, 1$

D05/1/003. Number of points where $f(x) = \begin{cases} \max\left(\left|x^2 - x - 2\right|, x^2 - 3x\right) & ; \quad x \geq 0 \\ \max\left(\ell n(-x), e^x\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$

is non differentiable will be :

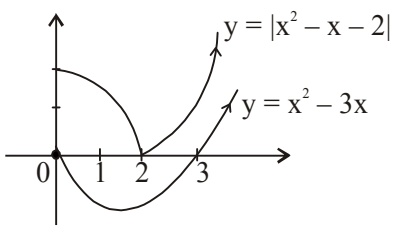
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) none of these

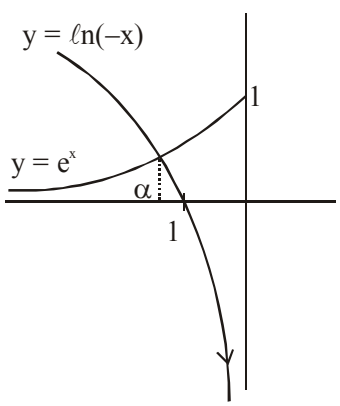
उन बिन्दुओं की संख्या जहाँ $f(x) = \begin{cases} \max\left(\left|x^2 - x - 2\right|, x^2 - 3x\right) & ; \quad x \geq 0 \\ \max\left(\ell n(-x), e^x\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$ अवकलनीय नहीं है, होगी :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

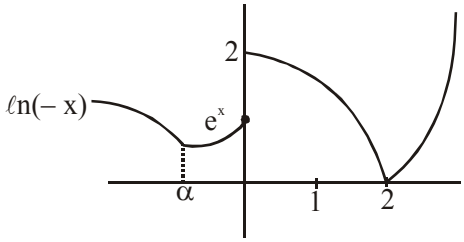
Ans. C

Sol.





So graph of f(x) is



Clearly 3 non-differentiability points

D05/1/004. If $f(x)=\dfrac{1}{x^2-17x+66}$, then $f\left(\dfrac{2}{x-2}\right)$ is discontinuous at :

(A) $x=2,\dfrac{7}{3},\dfrac{25}{11}$ (B) $x=2,\dfrac{8}{3},\dfrac{24}{11}$ (C) $x=2,\dfrac{7}{3},\dfrac{24}{11}$ (D) no where in its domain

यदि $f(x)=\dfrac{1}{x^2-17x+66}$ है, तब $f\left(\dfrac{2}{x-2}\right)$ असतत् है :

(A) $x=2,\dfrac{7}{3},\dfrac{25}{11}$ (B) $x=2,\dfrac{8}{3},\dfrac{24}{11}$

(C) $x=2,\dfrac{7}{3},\dfrac{24}{11}$ (D) इसके परिसर में कहीं भी नहीं

Ans. D

Sol.

$$f\left(\frac{2}{x-2}\right)=\frac{1}{\dfrac{4}{(x-2)^2}-\dfrac{34}{(x-2)}+66}$$

$$=\frac{(x-2)^2}{4-34(x-2)+66(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2}{2(3x-7)(11x-24)}$$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{2}{x-2}\right)$ is continuous in its domain

D05/1/005. Let f(x) is a non-zero differentiable function $\forall x\in R$ & satisfying $f(x+y)=f(x-y)\ \forall\ x,y\in R$, then :

माना f(x), $\forall x\in R$ में एक अशून्य अवकलनीय फलन है जो $f(x+y)=f(x-y)\ \forall\ x,y\in R$ को संतुष्ट करता है, तब :

(A) $f(1)+f(0)=f'(0)$ (B) $f(1)-f(0)=f'(0)$

(C) $f(0)+f(1)=f(2)$ (D) $3f(2)=2f(3)$

Ans. B

Sol. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=-f'(x)$

$\Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=k$ (constant)

D05/1/006. Let $f(x)=\begin{cases} g(x)\cdot\cos\frac{1}{x} & \text{if} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x=0 \end{cases}$ where g(x) is an even function differentiable at $x=0$, passing through the origin. Then $f'(0)$:

(A) is equal to 1 (B) is equal to 0 (C) is equal to 2 (D) does not exist

माना $f(x)=\begin{cases} g(x)\cdot\cos\frac{1}{x} & \text{if} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x=0 \end{cases}$ है। g(x) मूल बिन्दु से गुजरने वाला एक सम फलन है जो $x = 0$ पर अवकलनीय है। तब $f'(0)$:

(A) 1 के बराबर है (B) 0 के बराबर है (C) 2 के बराबर है (D) विद्यमान नहीं है

Ans. B

Sol. $\because g(x)=g(-x)\Rightarrow g'(x)=-g'(x)$

$\Rightarrow g'(0)=0$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)\cos\left(\frac{1}{0+h}\right)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)\cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}\cos\frac{1}{h}$$

$(\because g(0)=0)$

$=g'(0)$x a finite value

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0}=\frac{g(0-h)\cos\left(\frac{1}{0-h}\right)-f(0)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(-h)\cos\left(\frac{-1}{h}\right)}{-h}=0 \text{ (similarly)}$$

$\therefore f'(0)=0$

D05/1/007. Let $f(u)=\frac{1}{\ell n|u|-1}$, $u=\frac{x+e}{x+1}$. Number of values of x in domain for which f(u) is discontinuous is :

माना $f(u)=\frac{1}{\ell n|u|-1}$, $u=\frac{x+e}{x+1}$ है। परिसर में x के मानों की संख्या जिनके लिए f(u) असतत् है, होगी :

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0

Ans. D

Sol. Function is always continuous at every point in its domain.

D05/1/008. Number of values of x in [–4, 4] where $f(x) = [3x + 14] + |4x^2 - 1|(2x^2 + 3x - 2) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ is non-derivable, is equal to :

[Note : [k] denotes the largest integer less than or equal to k]

[–4, 4] में x के मानों की संख्या, जहाँ $f(x) = [3x + 14] + |4x^2 - 1|(2x^2 + 3x - 2) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ अवकलनीय नहीं है, होगी :

[नोट : [k], k से कम या बराबर महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है]

(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26

Ans. C

Sol. We have $f(x) = [3x + 14] + |4x^2 - 1|(2x^2 + 3x - 2) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

For $x \in [-4,4]$

$-12 \le 3x \le 12$

$$\therefore \quad x = \underbrace{\frac{-12}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{-10}{3}, \ldots, \frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{11}{3}, \frac{12}{3}}_{25 \text{ points}}$$

But $f(-4) = f(-4^+)$

$\Rightarrow$ f(x) is continuous at x = –4

Here f(x) is continuous at $x = \frac{-1}{2}$ but non-derivable at $x = \frac{-1}{2}$

As discontinuing $\Rightarrow$ non-differentiability

So, f(x) is non-derivable at 25 points in [–4,4]

D02/1/009. If high voltage current is applied on the field given by the graph $y + |y| - x - |x| = 0$. On which of the following curve a person can move so that he remains safe :

यदि रेखाचित्र $y + |y| - x - |x| = 0$ द्वारा दर्शाए गए क्षेत्र पर उच्च वोल्टेज धारा लागू की जाती है। तो निम्न में से कौनसे वक्र पर एक व्यक्ति चल सकता है ताकि वह सुरक्षित रह सके :

(A) $y = x^2$
(B) $y = \text{sgn}(-e^2)$
(C) $y = \log_{1/3} x$
(D) $y = m + |x|;\ m > 3$

Ans. D

Sol. Gives $y + |y| = x + |x|$

If $x > 0, y > 0 \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow y = x$

$x < 0, y > 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$x > 0, y < 0 \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$

$x < 0, y < 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ whole region of III quadrant.

For person to be safe there should not be point common to the given curves and the voltage field graph. Only $y = m + |x|$ doesnot have any point of intersection with the curve.

D02/1/010. If $|f(x) + 6 - x^2| = |f(x)| + |4 - x^2| + 2$, then f(x) is necessarily non negative for :

यदि $|f(x) + 6 - x^2| = |f(x)| + |4 - x^2| + 2$, तब f(x) किसके लिए आवश्यक रूप से अऋणात्मक होगा :

(A) $x \in [-2, 2]$
(B) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
(C) $x \in \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$
(D) $x \in [-5, -2] \cup [2, 5]$

Ans. A

Sol. Gives $|f(x) + 6 - x^2| = |f(x)| + |4 - x^2| + 2 \Rightarrow |f(x) + 2 + (4 - x^2)| = |f(x)| + |4 - x^2| + 2$

Since $|a + b + c| = |a| + |b| + |c|$

If $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ or $a \leq 0, b \leq 0, c \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ and $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ and $f(x) \geq 0$

D02/1/011. Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $f : A \to A$ satisfy $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$.

Suppose $g : A \to A$ satisfies $g(1) = 3$ and $fog = gof$ then $g =$:

माना $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $f : A \to A$, $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ को संतुष्ट करते हैं।

माना $g : A \to A$, $g(1) = 3$ को संतुष्ट करता है तथा $fog = gof$ तब $g =$:

(A) $\{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
(B) $\{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$
(C) $\{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}$
(D) $\{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 1)\}$

Ans. B

Sol. Givens $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1, g(1) = 3$ and $f[g(x)] = g[f(x)]$

at $x = 1$ $f[g(1)] = g[f(1)] \Rightarrow f(3) = g(2) \Rightarrow g(2) = 4$

at $x = 4$ $f[g(2)] = g[f(2)] \Rightarrow f(4) = g(3) \Rightarrow g(3) = 1$

at $x = 3$ $f[g(3)] = g[f(3)] \Rightarrow f(1) = g(4) \Rightarrow g(4) = 2$

D02/1/012. The number of solutions of the equation $[y + [y]] = 2 \cos x$ is

(where $y = \frac{1}{3}[\sin x + [\sin x + [\sin x]]]$ and $[\cdot]$ = greatest integer function) :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) Infinite

समीकरण $[y + [y]] = 2\cos x$ के हलों की संख्या होगी

(जहाँ $y = \frac{1}{3}[\sin x + [\sin x + [\sin x]]]$ तथा $[\cdot]$ = महत्तम पूर्णांक फलन) :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त

Ans. A

Sol. Gives $[y + [y]] = 2\cos x \Rightarrow [y] + [y] = 2\cos x = 2[y] = 2\cos x$; $[y] = \cos x$ ....(1)

Where $y = \frac{1}{3}[\sin x + [\sin x + [\sin x]]]$

$y = \frac{1}{3}[\sin x + [\sin x] + [\sin x]]$

$y = \frac{1}{3}(3[\sin x])$

$y = [\sin x]$ ....(2)

From eq^n. (1) & (2)

$[\sin x] = \cos x$

$\Rightarrow$ $\cos x = 0, 1, -1$

Hence no solution

D02/1/013. The function, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^{2n})}{(x^{2n}\operatorname{sgn} x)^{2n+1}}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $n \in N$ is :

(A) Odd function (B) Even function

(C) Neither odd nor even function (D) Constant function

फलन $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^{2n})}{(x^{2n}\operatorname{sgn} x)^{2n+1}}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $n \in N$ है :

(A) विषम फलन (B) सम फलन

(C) ना तो विषम और ना ही सम (D) अचर फलन

Ans. B

Sol. $f(x)=\dfrac{x^{2n}}{\left(x^{2n}\operatorname{sgn}x\right)^{2n+1}}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}\right]x\neq 0$ and $f(0)=1$

when $f(x)=\dfrac{\left(x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}\right)^{2n+1}}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}\right]$; $x>0$

$f(x)=\dfrac{x^{2n}}{-\left(x^{2n}\right)^{2n+1}}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}\right]$; $x<0$

Clearly $f(x)=f(-x)$. Hence $f(x)$ is even function.

D02/1/014. Let $f(1)=1$, and $f(n)=2\sum_{r=1}^{n-1}f(r)$. Then $\sum_{r=1}^{m}f(r)$ is equal to :

माना $f(1)=1$, तथा $f(n)=2\sum_{r=1}^{n-1}f(r)$ हैं। तब $\sum_{r=1}^{m}f(r)$ बराबर होगा :

(A) $\dfrac{3^m-1}{2}$ (B) 3^m (C) 3^{m-1} (D) $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}$

Ans. C

Sol. $f(n)=2(f(1)+f(2).....f(n-1))$

$f(2)=2f(1)$

$f(3)=2[f(1)+f(2)]=2\left[\dfrac{f(2)}{2}+f(2)\right]=3f(2)$

$f(4)=2[f(1)+f(2)+f(3)]$

$=2\left[\dfrac{f(3)}{2}+f(3)\right]=3f(3)$

$\vdots$

$\sum_{r=1}^{m}f(r)=f(1)+f(2).....+f(m)$

$=f(1)+f(2)+3f(2).....+$

$= f(1) + f(2)\,[1 + 3 + 3^2 .....3^{m-2}]$

$$= f(1) + 2\cdot\frac{\left(3^{m-1}-1\right)}{(3-1)} = 3^{m-1}$$

D02/1/015. Let $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ then $\underbrace{fofofo.....of}_{n\ times}(x)$ is :

माना $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ तो $\underbrace{fofofo.....of}_{n\ times}(x)$ होगा :

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+\left(\sum_{r=1}^{n} r\right)x^2}}$

(B*) $\frac{x}{\sqrt{1+\left(\sum_{r=1}^{n} 1\right)x^2}}$

(C) $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^n$

(D) $\frac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$

Ans. B

Sol. Gives $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{f_0 f_0 .....f_0 f(x)}_{n\ times} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+\left(\sum_{r=1}^{n} 1\right)x^2}}$$

D02/1/016. Let $f : R \to R$, $f(x) = 2x + |\cos x|$, then f is :

(A) One-one and into (B) One-one and onto (C) Many-one and into (D) Many-one and onto

माना $f : R \to R$, $f(x) = 2x + |\cos x|$, तो f होगा :

(A) एकैकी और अन्तर्क्षेपी (B) एकैकी और आच्छादक (C) बहुएकैकी तथा अन्तर्क्षेपी (D) बहुएकैकी तथा आच्छादक

Ans. B

Sol. $f(x) = 2x + |\cos x|$

Range $f(x) = R =$ codomain $\Rightarrow$ onto.
Clearly f(x) is increasing function $\Rightarrow$ one-one function.

D02/1/017. The function $f(x) = 0$ has eight distinct real solution and f also satisfy $f(4 + x) = f(4 - x)$. The sum of all the eight solution of $f(x) = 0$ is :

फलन $f(x) = 0$ के आठ भिन्न वास्तविक मूल हैं तथा f, $f(4 + x) = f(4 - x)$ को भी संतुष्ट करता है। $f(x) = 0$ के सभी आठों हलों का योग होगा :

(A) 12 (B) 32 (C) 16 (D) 15

Ans. B

Sol. If $f(4 + x) = f(4 - x)$

$\Rightarrow$ f(x) is symmetric about $x = 4$.

roots of $f(x) = 0$ are of the form

D02/1/018. The number of positive integral values of x satisfying $\left[\frac{x}{9}\right] = \left[\frac{x}{11}\right]$ is :

(where [·] denote greatest integer function)

$\left[\frac{x}{9}\right] = \left[\frac{x}{11}\right]$ को संतुष्ट करने वाले x के धनात्मक पूर्णांक मानों की संख्या होगी :

(जहाँ [·] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है)

(A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24

Ans. D

Sol. $\left[\frac{x}{9}\right] = \left[\frac{x}{11}\right]$

$x \in [1, 9) \cup [11, 18) \cup [22, 27) \cup [33, 36) \cup [44, 45)$

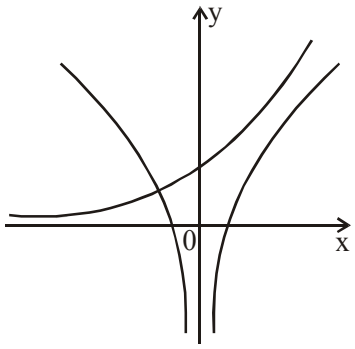
D02/1/019. The number of solution of the equation $e^x - \log|x| = 0$ is :

समीकरण $e^x - \log|x| = 0$ के हलों की संख्या होगी :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Ans. B

Sol.



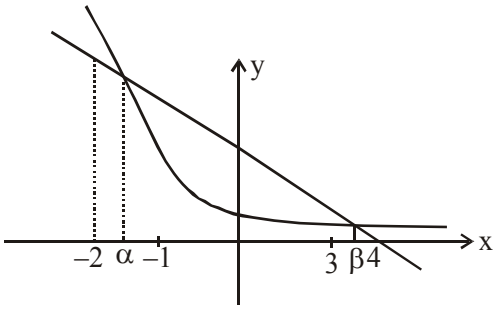
D02/1/020. If complete solution set of $e^{-x} \le 4 - x$ is $[\alpha, \beta]$, then $[\alpha] + [\beta]$ is equal to (where $[\cdot]$ denotes greatest integer function) :

$e^{-x} \le 4 - x$ का पूर्ण हल समुच्चय $[\alpha, \beta]$ है, तब $[\alpha] + [\beta]$ बराबर होगा (जहाँ $[\cdot]$ महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है) :

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4

Ans. C

Sol.



$[\alpha] = -2$

$[\beta] = 3$

D02/1/021. Let $f : R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R, f(x) = \frac{3x+5}{2x-3}$. Let $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ for $n \ge 2, n \in N$, then $f_{2008}(x) + f_{2009}(x) =$:

माना $f : R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R, f(x) = \frac{3x+5}{2x-3}$ है। $n \ge 2, n \in N$ के लिए माना $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, तब $f_{2008}(x) + f_{2009}(x) =$:

(A) $\frac{2x^2+5}{2x-3}$ (B) $\frac{x^2+5}{2x-3}$ (C) $\frac{2x^2-5}{2x-3}$ (D) $\frac{x^2-5}{2x-3}$

Ans. A

Sol. $f(f(x)) = x$

$$f_{2008}(x) + f_{2009}(x) = x + f(x) = x + \frac{3x+5}{2x-3} = \frac{2x^2+5}{2x-3}$$

D02/1/022. Range of the function, $f(x) = \frac{(1+x+x^2)(1+x^4)}{x^3}$, for $x > 0$ is :

$x > 0$ के लिए फलन $f(x) = \frac{(1+x+x^2)(1+x^4)}{x^3}$ का परिसर होगा :

(A) $[0, \infty)$ (B) $[2, \infty)$ (C) $[4, \infty)$ (D) $[6, \infty)$

Ans. D

Sol. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$; $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$; $x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 6$

D02/1/023. The function $f : (-\infty, 3] \to (0, e^7]$ defined by $f(x) = e^{x^3-3x^2-9x+2}$ is :

(A) Manyone & onto (B) Manyone & into (C) One to one & onto (D) One to one & into

$f(x) = e^{x^3-3x^2-9x+2}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : (-\infty, 3] \to (0, e^7]$:

(A) बहुएकैकी और आच्छादक (B) बहुएकैकी और अन्तर्क्षेपी

(C) एकैकी तथा आच्छादक (D) एकैकी तथा अन्तर्क्षेपी

Ans. A

Sol. $f(x) = e^{x^3-3x^2-9x+2}$

$f'(x) = e^{(x^3-3x^2-9x+2)} 3(x-3)(x+1)$

$\Rightarrow f(x)$ is many one

at $x = -1$, $f(x) = e^7$

at $x \to -\infty$ $f(x) \to 0$

Range of $f(x)$ is $(0, e^7)$

D02/1/024. If $f(x) = \sin\left\{\log\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}\right)\right\}$; $x \in R$, then range of $f(x)$ is given by :

(A) $[-1, 1]$ (B) $[0, 1]$ (C) $(-1, 1)$ (D) None of these

यदि $f(x) = \sin\left\{\log\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}\right)\right\}$; $x \in R$, तब $f(x)$ का परिसर होगा :

(A) $[-1, 1]$ (B) $[0, 1]$ (C) $(-1, 1)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. A

Sol. $D_f : [-2, 1]$

$$-\infty < \log\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}\right) < \infty$$

$$-1 \le \sin\left(\log\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}\right)\right) \le 1$$

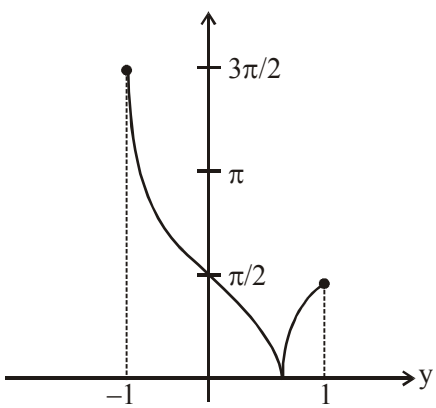
D02/1/025. Let $f(x) = \sin^{-1}x - \cos^{-1}x$, then the set of values of k for which of $|f(x)| = k$ has exactly two distinct solutions is :

माना $f(x) = \sin^{-1}x - \cos^{-1}x$, तो k के मानों का समुच्चय होगा जिसके लिए $|f(x)| = k$ के ठीक दो भिन्न हल होंगे :

(A) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Ans. A

Sol. $f(x) = \sin^{-1} x - \cos^{-1}x$



$$= 2\sin^{-1} x - \frac{\pi}{2}$$

D02/1/026. Let $f : R \to R$ is defined by $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & ; \quad x \le 1 \\ \ln x + \left(b^2 - 3b + 10\right) & ; \quad x > 1 \end{cases}$. If f(x) is invertible, then the set of all values of 'b' is :

(A) {1, 2} (B) ϕ (C) {2, 5} (D) None of these

माना $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & ; \quad x \le 1 \\ \ln x + \left(b^2 - 3b + 10\right) & ; \quad x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है। यदि f(x) व्युत्क्रमणीय है, तो 'b' के सभी मानों का समुच्चय होगा :

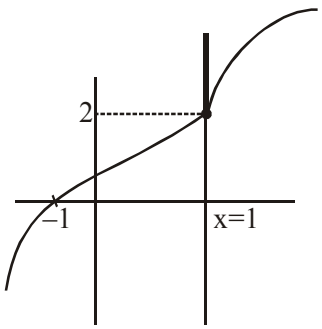
(A) {1, 2} (B) ϕ (C) {2, 5} (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. A

Sol. is one-one when

$2^3 = \ell n1 + b^2 - 3b + 10$

$\Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0$



$\Rightarrow b = 1, 2$

D02/1/027. If $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$, then find the value of $\sum_{r=1}^{2n-1} 2f\left(\dfrac{r}{2n}\right)$.

यदि $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$, तो $\sum_{r=1}^{2n-1} 2f\left(\dfrac{r}{2n}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(A) 2n (B) 2n – 1 (C) n – 1 (D) 2n + 1

Ans. B

Sol. $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$

$f(1-x) = \dfrac{2^{1-x}}{2^x + \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f(x) + f(1-x) = 1$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{r=1}^{2n-1} 2f\left(\frac{r}{2n}\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{2}{2n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{2n}\right) + f\left(\frac{n}{2n}\right) + f\left(\frac{n+1}{2n}\right) + ... + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right]$$

$$= 2\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)+f\left(1-\frac{1}{2n}\right)+f\left(\frac{2}{2n}\right)+f\left(1-\frac{2}{2n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{2n}\right)+f\left(1-\frac{n-1}{2n}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 2\ [1 + 1 + ... + (n-1) \text{ times}] + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(n-1) + 1 = 2n - 1$$

D02/1/028. Let $f : R - \{2\} \to R$ be a function satisfying the following functional equation,

$$2f(x)+3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)=100x+80\forall x \in R-\{2\}.$$

The value of $|f(0)|$ is :

माना $f : R - \{2\} \to R$ निम्नलिखित कार्यात्मक समीकरण को संतुष्ट करने वाला एक फलन है।

$$2f(x)+3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)=100x+80\forall x \in R-\{2\}.$$

$|f(0)|$ का मान होगा :

(A) 854 (B) 754 (C) 954 (D) 1054

Ans. A

Sol. We have, $f(x)=-\frac{3}{2}f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)+50x+40$

Replacing x by $\frac{2x+29}{x-2}$ in the given function equation

We get : $f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)=-\frac{3}{2}f\left(\frac{2\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)+29}{\frac{2x+29}{x-2}-2}\right)+50\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)+40$

$$=-\frac{3}{2}f(x)+50\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)+40$$

Replacing this value in the given function equation we get :

$f(x)=136-40x+\frac{1980}{x-2}$ $\Rightarrow$ $f(0) = -854 \Rightarrow |f(0)| = 854$

D02/1/029. If $f(x + 2) - 5f(x + 1) + 6f(x) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, then the least positive prime factor of $f(2008)$ is :

यदि $f(x + 2) - 5f(x + 1) + 6f(x) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, तो $f(2008)$ का न्यूनतम धनात्मक अभाज्य गुणनखण्ड होगा :

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

Ans. C

Sol. $f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 0 \Rightarrow (E^2 - 5E + 6)f(x) = 0$

Solving $E^2 - 5E + 6 = 0$, the roots are 2 and 3.

$\therefore$ $f(x) = A \cdot 3^x + B \cdot 2^x$

$f(0) = 0 \Rightarrow B = -A$

$f(1) = 1 \Rightarrow A = 1$

$\therefore$ $f(x) = 3^x - 2^x$

$\therefore$ $f(2008) = 3^{2008} - 2^{2008}$ which is divisible by $3 + 2 = 5$.

D02/1/030. The sum of all possible solution(s) of the equation $\left||x+2|-3\right| = \text{sgn}\left(1 - \left|\frac{(x-2)(x^2+10x+24)}{(x^2+1)(x+4)(x^2+4x-12)}\right|\right)$ is :

(A) 0 (B) –8 (C) –10 (D) Not applicable

समीकरण $\left||x+2|-3\right| = \text{sgn}\left(1 - \left|\frac{(x-2)(x^2+10x+24)}{(x^2+1)(x+4)(x^2+4x-12)}\right|\right)$ के सभी संभव हलों का योग होगा :

(A) 0 (B) –8 (C) –10 (D) अनुपलब्ध

Ans. D

Sol. $\left||x+2|-3\right| = \text{sgn}\left(1 - \left|\frac{(x-2)(x+6)(x+4)}{(x^2+1)(x+4)(x+6)(x-2)}\right|\right)$

$\left||x+2|-3\right| = \text{sgn}\left(1 - \left|\frac{1}{x^2+1}\right|\right)$

$||x + 2| - 3| = 1 \quad \Rightarrow \quad |x + 2| - 3 = \pm 1$

$\Rightarrow |x + 2| = 4, 2 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = \pm 4, \pm 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2, -4, 0, -6$

D02/1/031. If $f(x) = \{x\} + \left\{x + \left[\frac{x}{1+x^2}\right]\right\} + \left\{x + \left[\frac{x}{1+2x^2}\right]\right\} + ... + \left\{x + \left[\frac{x}{1+99x^2}\right]\right\}$ the value of $\left[f\left(\sqrt{3}\right)\right]$ is :

(A) 5050 (B) 4950 (C) 17 (D) 73

Note : [x] and {x} denote greatest integer and fractional part function of x respectively.

यदि $f(x)=\{x\}+\left\{x+\left[\frac{x}{1+x^2}\right]\right\}+\left\{x+\left[\frac{x}{1+2x^2}\right]\right\}+....+\left\{x+\left[\frac{x}{1+99x^2}\right]\right\}$ तो $\left[f\left(\sqrt{3}\right)\right]$ का मान होगा :

(A) 5050 (B) 4950 (C) 17 (D) 73

नोट : [x] तथा {x} क्रमशः x के महत्तम पूर्णांक फलन तथा भिन्नात्मक भाग फलन को दर्शाते हैं।

Ans. D

Sol. $f(x)=\{x\}+\left\{x+\left[\frac{x}{1+x^2}\right]\right\}+\left\{x+\left[\frac{x}{1+2x^2}\right]\right\}+....+\left\{x+\left[\frac{x}{1+99x^2}\right]\right\}$

$=100\{x\}$ $(\{x+m\}=\{x\}, m\in I)$

$f\left(\sqrt{3}\right)=100(0.732)=73.2$ $\Rightarrow\left[f\left(\sqrt{3}\right)\right]=73$

D02/1/032. If A > 0, c, d, u, v are non zero constants, and the graphs of f(x) = |Ax + c| + d and g(x) = –|Ax + u| + v intersect exactly at two points (1,4) and (3,1), then the value of $\frac{u+c}{A}$ equals :

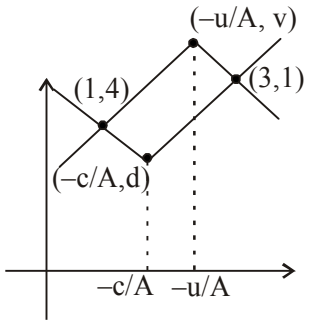
यदि A > 0, c, d, u, v अशून्य अचर हैं, तथा f(x) = |Ax + c| + d और g(x) = –|Ax + u| + v के रेखाचित्र ठीक दो बिन्दुओं (1,4) तथा (3,1) पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो $\frac{u+c}{A}$ का मान बराबर होगा :

(A) 4 (B) –4 (C) 2 (D) –2

Ans. B

Sol. The figure is a parallelogram and the diagonals bisect each other :

$\therefore\left(\frac{-u}{A}\right)+\left(\frac{-c}{A}\right)=3+1;$



$\therefore\frac{u+c}{A}=-4$

D02/1/033. Solutions of the quadratic equation $(3|x|-3)^2=|x|+7$, which belongs to the domain of the function $y=\sqrt{(x-4)x}$ is :

द्विघात समीकरण $(3|x| - 3)^2 = |x| + 7$, के हल जो फलन $y = \sqrt{(x-4)x}$ के प्रांत से संबंध रखते है, होंगे:

(A) $\pm\frac{1}{9}, \pm 2$ (B) $\frac{1}{9}, 8$ (C) $-2, -\frac{1}{9}$ (D) $-\frac{1}{9}, 8$

Ans. C

Sol. $(3|x| - 3)^2 = |x| + 7$

$\Rightarrow \quad (|x| - 2)(9|x| - 1) = 0$

$|x| = 2, \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm 2, \pm\frac{1}{9}$

$y = \sqrt{x(x-4)}$

$D_f : (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

D03/1/034. Let $f : A \to B$ be any function where A is a set containing the positive integral solution of the inequality $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } 2) > x^2 - 3x$ and B is the set of all divisors of the natural number 2010. If $f(i) \le f(j)\ \forall\ i < j$, then the total number of mappings from A to B is k.If $x \in (0, 2\pi)$ and $y \in (0, 2\pi)$, then the number of distinct ordered pairs (x, y) satisfying the equation $9\cos^2 x + \sec^2 y - \alpha\cos x - 4\sec y + 5 = 0$, is (where, α is the unit digit of k) :

माना $f : A \to B$ एक फलन है, जहाँ समुच्चय A असमिका $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } 2) > x^2 - 3x$ के धनात्मक पूर्णांकीय हलों को निरूपित करता है तथा B प्राकृत संख्या 2010 के सभी भाजकों का समुच्चय है। यदि $f(i) \le f(j)\ \forall\ i < j$ है, तो A से B में परिभाषित कुल फलनों की संख्या k होगी।यदि $x \in (0, 2\pi)$ तथा $y \in (0, 2\pi)$, तो भिन्न–भिन्न युग्म (x, y) की संख्या जो समीकरण $9\cos^2 x + \sec^2 y - \alpha\cos x - 4\sec y + 5 = 0$ को संतुष्ट करती है, होगी (जहाँ , α ,k का इकाई अंक है) :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Ans. D

Sol. We have $\text{cosec}^{-1}\text{cosec } 2 > x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - (\pi - 2) < 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{1+4\pi}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{1+4\pi}}{2}$.

$\therefore$ Positive integral solution of above inequality are 1, 2, 3.

Now $2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$, total number of divisors of 2010 = 16.

So A contains 3 elements and B contains 16 elements. Number of mapping are as follows :

$f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow {}^{16}C_3 = 560$

$f(1) = f(2) < f(3) \Rightarrow {}^{16}C_2 = 120$

$f(1) < f(2) = f(3) \Rightarrow {}^{16}C_2 = 120$

$f(1) = f(2) = f(3) \Rightarrow {}^{16}C_1 = 16$

Hence total mappings = 816

D03/1/035. The value of $\tan\{\sin^{-1}(\cos(\sin^{-1}x))\}\,.\,\tan\{\cos^{-1}(\sin(\cos^{-1}x))\}$; $x \in (0, 1)$ is equal to k. Sum of all the solutions of the equation $\cos 2x + \sin^2 2x = k$, which lie in the interval $[0, 2\pi]$ is equal to :

$\tan\{\sin^{-1}(\cos(\sin^{-1}x))\}\,.\,\tan\{\cos^{-1}(\sin(\cos^{-1}x))\}$; $x \in (0, 1)$ का मान k है। समीकरण $\cos 2x + \sin^2 2x = k$ के हलों का योग जो अंतराल $[0, 2\pi]$ में विद्यमान है, होगा :

(A) 4π (B) 5π (C) 7π (D) 8π

Ans. C

Sol. $\cos 2x(1 - \cos 2x) = 0$

$\cos 2x = 1$ or $\cos 2x = 0$

$\therefore\ x = n\pi$ or $x = (2n-1)\dfrac{\pi}{4}$

$0,\ \pi,\ 2\pi$ or $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4} = 7\pi$

D03/1/036. Number of solution of the equation $\sin^{-1}(4\sin^2\theta + \sin\theta) + \cos^{-1}(6\sin\theta - 1) = \dfrac{\pi}{2}$ lying in the interval $[0, 5\pi]$, is P. If $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 6\theta} + \dfrac{\cos 6\theta}{\sin 18\theta} + \dfrac{\cos 18\theta}{\sin 54\theta} = \dfrac{1}{K}(\cot 2\theta - \cot 54\theta)$, then K + P is :

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) None of these

अंतराल $[0, 5\pi]$ में विद्यमान, समीकरण $\sin^{-1}(4\sin^2\theta + \sin\theta) + \cos^{-1}(6\sin\theta - 1) = \dfrac{\pi}{2}$ के हलों की संख्या P है। यदि $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 6\theta} + \dfrac{\cos 6\theta}{\sin 18\theta} + \dfrac{\cos 18\theta}{\sin 54\theta} = \dfrac{1}{K}(\cot 2\theta - \cot 54\theta)$, तो K + P होगा :

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. B

Sol. $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 6\theta} = \dfrac{\sin 4\theta}{2\sin 6\theta \sin 2\theta} = \dfrac{\sin(6\theta - 2\theta)}{2\sin 6\theta \sin 2\theta} = \dfrac{1}{2}(\cot 2\theta - \cot 6\theta)$

D03/1/037. Sum the series $\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{1+3\cdot 4}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{6}{1+8\cdot 9}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{8}{1+15\cdot 16}\right) + \ldots\ldots \infty$:

श्रृंखला $\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{1+3\cdot 4}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{6}{1+8\cdot 9}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{8}{1+15\cdot 16}\right) + \ldots\ldots \infty$ का योग होगा :

(A) $\cot^{-1}(2)$ (B) $\tan^{-1}(2)$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

Ans. A

Sol. $\sum_{n=1}^{\alpha} \tan^{-1}\left(\frac{(n+1)^2+(n+1)-\left((n+1)^2-(n+1)\right)}{1+(n+1)^4-(n+1)^2}\right)$

D03/1/038. Number of solution(s) of the equation $2\tan^{-1}(2x-1) = \cos^{-1}(x)$:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) infinitely many

समीकरण $2\tan^{-1}(2x-1) = \cos^{-1}(x)$ के हलों की संख्या :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) अनन्त रूप से कई

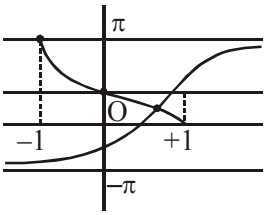
Ans. A

Sol. $2\tan^{-1}(2x-1) = \cos^{-1} x$

$2x - 1 \geq 0 \qquad 1 \geq x > 0$

$x \geq 1/2$

only one solution



D03/1/039. $\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{3\sqrt{2}}-2\right)$ equals to :

$\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{3\sqrt{2}}-2\right)$ बराबर होगा :

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{3\pi}{2}$

Ans. D

Sol. Put $x = 2\sin\theta$, $y = 3\cos\theta$

$\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{3\sqrt{2}}-2 \qquad = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}-2 \in [-3,-1]$

$\therefore \qquad \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}-2 = -1$ only

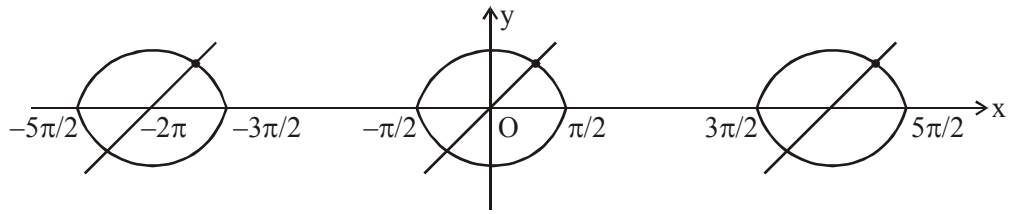
D03/1/040. The total number of ordered pairs (x, y) satisfying $|y| = \cos x$ and $y = \sin^{-1}(\sin x)$, where $x \in [-2\pi, 3\pi]$ is equal to :

$|y| = \cos x$ तथा $y = \sin^{-1}(\sin x)$ को संतुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों (x, y) की संख्या, जहाँ $x \in [-2\pi, 3\pi]$, होगी :

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Ans. C

Sol.



D04/1/041. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^+} \dfrac{\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$:

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^+} \dfrac{\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$:

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) 0

Ans. C

Sol. Let $\sin^{-1} x = \theta$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos^{-1}\sin 2\theta}{\sin\theta - \sin\frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{2\theta - \frac{\pi}{2}}{2\sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{4}}{2}\right)} = 2\sqrt{2} \ ; \ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos^{-1}\sin 2\theta}{\sin\theta - \sin\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}$$

D04/1/042. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{2k} - \cos\frac{\pi}{2k} - \sin\left(\frac{\pi}{2(k+2)}\right) + \cos\frac{\pi}{2(k+2)}\right)$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{2k} - \cos\frac{\pi}{2k} - \sin\left(\frac{\pi}{2(k+2)}\right) + \cos\frac{\pi}{2(k+2)}\right)$:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Ans. D

Sol. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{2k} - \sin\frac{\pi}{2(k+2)}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{2(k+2} - \cos\frac{\pi}{2k}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{10}+.....+\sin\frac{\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{2(n+2)}\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{6}+.....+\cos\frac{\pi}{2(n+2)}-\cos\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+2-\frac{1}{\sqrt{2}}=3$$

D04/1/043. If m and n are positive integers then $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{m}}-(\cos x)^{\frac{1}{n}}}{x^2}$ equals to :

(A) $m-n$ (B) $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$ (C) $\frac{m-n}{2mn}$ (D) None of these

यदि m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं तब $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{m}}-(\cos x)^{\frac{1}{n}}}{x^2}$ का मान होगा :

(A) $m-n$ (B) $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$ (C) $\frac{m-n}{2mn}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. C

Sol. $$\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}-2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{m-n}{2mn}$$

D04/1/044. If $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x.....\infty}}}}}$, then value of $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)}{(x-1)}$:

यदि $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x.....\infty}}}}}$, तो $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)}{(x-1)}$ का मान होगा :

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

Ans. D

Sol. Let $y=\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x+.....\infty}}}$ &

$z=\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x+.....\infty}}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{x+z}$ & $z=\sqrt{x-y}$

$\Rightarrow y^2=x+z$ & $z^2=x-y$

$\Rightarrow y^2-z^2=(z+y)$ $\Rightarrow$ $y-z=1$

$\Rightarrow y^2=x+(y-1)$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{1+\sqrt{4x-3}}{2}$

Now

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{2}\right)}{(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{x}}{2(x-1)}=\frac{3}{4}$$

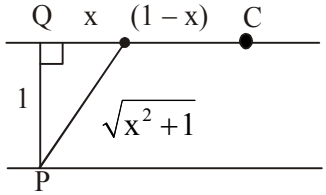
D09/1/045. A person is standing at the edge of a slow moving river which isn 1km wide. He wishes to return to the camp ground on the opposite side of the river for which he may swim to any point on the opposite bank and then walk for the rest of the distance. The campground is 1 km away from the point on the opposite bank directly across from where he starts to swim. If he swims at the rate of 2km/hr and walks at the rate of 3 km/hr, the minimum time taken by him is approximately :

एक व्यक्ति एक धीमी प्रवाहित नदी के एक किनारे पर खड़ा है जो कि 1 km चौड़ी है। उसे नदी को पार करके दूसरे छोर पर अपने कैम्प में जाना है। जिसके लिए वह नदी को तैर कर पार करें और कुछ दूरी पैदल तय करें। कैम्प जहाँ पर वह अभी खड़ा है, उसके ठीक विपरीत बिन्दु से 1 km दूर है। यदि वह 2km/hr की दर से तैरता है और 3 km/hr की दर से पैदल चलता है तो उसके द्वारा लिया गया न्यूनतम समय लगभग है :

(A) 0.6 hr (B) 0.7 hr (C) 0.8 hr (D) 0.9 hr

Ans. B

Sol. $T=\dfrac{D}{S}$ $T=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}+\dfrac{1-x}{3}=f(x)$ (say)



$f'(x)=0$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ for minima न्यूनतम मान के लिए

$\Rightarrow f(x)=$ minimum time न्यूनतम समय $=0.7$ hr approximately लगभग

D09/1/046. If the points of local extremum of $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x + 1$ lies between –2 & 4, then 'a' belongs to :

यदि $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x + 1$ के स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु –2 तथा 4 में विद्यमान हैं, तब 'a' :

(A) $(-2,2)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ (C) $(-1,3)$ (D) $(3, \infty)$

Ans. C

Sol. $f'(x) = 3(x^2 - 2ax + a^2 - 1)$

Clearly roots of $f'(x) = 0$ must be distinct and lie in the interval $(-2,4)$.

$\therefore \quad D > 0 \Rightarrow a \in R$ ...(1)

$f'(-2) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 3 > 0$

$\Rightarrow a < -3$ or $a > -1$ ...(2)

$f'(4) > 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 15 > 0$

$\Rightarrow a > 5$ or $a < 3$ ...(3)

and $-2 < -\dfrac{B}{2A} < 4 \Rightarrow -2 < a < 4$ ...(4)

From (1), (2), (3) & (4), $a \in (-1,3)$

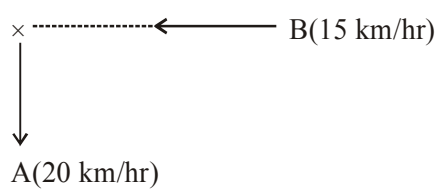
D09/1/047. A boat leaves the dock at 2 PM and travels due south at a speed of 20 km/h. Another boat has been heading due east at 15km/hr and reaches the same dock at 3 PM. At what times the two boats were closest to each other :

एक नाव बंदरगाह को 2 PM पर छोड़ती है तथा दक्षिण की तरफ 20 किमी./घंटा की गति से यात्रा करती है। उसी समय एक अन्य नाव पूर्व की तरफ 15 किमी./घंटा की गति से यात्रा करती है तथा उसी बंदरगाह पर 3 PM पर पहुँचती है। तो किस समय पर दोनों नावें एक–दूसरे के सबसे करीब थीं :

(A) 2 : 21 : 36 PM (B) 2 : 15 : 00 PM (C) 2 : 15 : 15 PM (D) 2 : 21 : 40 PM

Ans. A

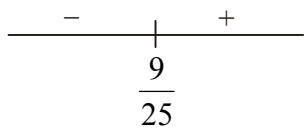
Sol.



At 2 PM boat B is 15 km away from Dock. At time t hr boat A is 20t km way & boat B is 15 – 15t away from dock.

$(AB)^2 = f(t) = 400t^2 + 15^2 (1 - t)^2$

$f'(t) = 800t + 15^2 . 2(t - 1) = 1250t - 450$



AB is minimum at $t = \frac{9}{25}$ hrs. $= 21$ min 36 sec.

$\therefore$ time = 2 : 21 : 36 PM

D09/1/048. Function $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{1 + x^2}}$:

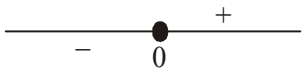
(A) is always increasing
(B) is always decreasing
(C) has exactly one point of minima
(D) has exactly one point of maxima

फलन $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{1 + x^2}}$:

(A) निरंतर वर्धमान
(B) निरंतर ह्रासमान
(C) ठीक एक निम्निष्ठ बिन्दु रखता है
(D) ठीक एक उच्चिष्ठ बिन्दु रखता है

Ans. C

Sol. $f'(x) = \frac{x(x^2 + 4)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$



D09/1/049. A box is to be made with square base and open top. If the area of material used is 48 sq. meter, then maximum volume of the box is :

एक वर्गाकार आधार तथा खुले शीर्ष वाला एक बक्सा बनाया जाना है। यदि उपयोग किए जाने वाली सामग्री का क्षेत्रफल 48 वर्ग मीटर है, तो बक्से का अधिकतम आयतन होगा :

(A) $48m^3$
(B) $16m^3$
(C) $32m^3$
(D) $36m^3$

Ans. C

Sol. Let length = breadth = x and height = y

Given, $x^2 + 4xy = 48$ ...(i)

and volume $V = x^2y = x^2\left(\frac{48 - x^2}{4x}\right)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{4}(48x - x^3) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4}(48 - 3x^2) = 0$

$\Rightarrow x = \pm 4$

Now (i) $\Rightarrow y = \frac{48-16}{16} = 2$

$\therefore V_{max} = 4^2.2 = 32m^3$.

D09/1/050. A population of 1000 bacteria introduced into nutrient medium grows according to law $P(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$. The maximum size of bacterial population is equal to :

पोषक माध्यम में प्रविष्ट 1000 जीवाणुओं की जनसंख्या P(t) नियमानुसार $P(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$ बढ़ती है। जीवाणुओं की जनसंख्या का अधिकतम आकार बराबर है :

(A) 1100 (B) 1250 (C) 1050 (D) 5250

Ans. C

Sol. $P(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$

$$= 1000 + \left(\frac{100+t^2}{1000t}\right)^{-1} = 1000 + \left(\frac{t}{1000} + \frac{1}{10t}\right)^{-1}$$

$$t > 0 \Rightarrow \frac{\frac{t}{1000} + \frac{1}{10t}}{2} \geq \frac{1}{100}\{AM \geq GM\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t}{1000} + \frac{1}{10t}\right)^{-1} \leq 50$$

With equality at $\frac{t}{1000} = \frac{1}{10t}$

$\Rightarrow \quad t_0 = 10s \quad \Rightarrow \quad P_{max}(t) = 1050$

D09/1/051. $f(x) = |x-1| + |x-2|$, $I = \int_0^3 f(x)\,dx$, M = the minimum value of f, N = f′(x) for x < –4 and C = the value of f″(4). Then the value of $\frac{M^2 - N^2 + IC}{2}$ is :

$f(x) = |x-1| + |x-2|$, $I = \int_0^3 f(x)\,dx$, M = f का न्यूनतम मान, $x < -4$ के लिए $N = f'(x)$ तथा $C = f''(4)$ का मान है। तब $\frac{M^2 - N^2 + IC}{2}$ का मान होगा :

(A) $\frac{-3}{2}$ (B) $\frac{-5}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

Ans. A

Sol. $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x<1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2x-3 & x \ge 2 \end{cases}$

Clearly, I = 5 {Using the piece wise definition of f}

M = 1

N = –2

C = 0

D06/1/052. Let $f(x) = \begin{cases} \min(x, x^2) & x \ge 0 \\ \max(2x, x-1) & x < 0 \end{cases}$, then which of the following is not true :

(A) f(x) is not differentiable at x = 0

(B) f(x) is not differentiable at exactly two points

(C) f(x) is continuous every where

(D) f(x) is strictly increasing $\forall\, x \in R$

माना $f(x) = \begin{cases} \min(x, x^2) & x \ge 0 \\ \max(2x, x-1) & x < 0 \end{cases}$, तब निम्न में से कौनसा सत्य नहीं है :

(A) f(x), x = 0 पर अवकलनीय नहीं है

(B) f(x), ठीक दो बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है

(C) f(x) हर जगह सतत् है

(D) f(x), $\forall\, x \in R$ के लिए एकदिष्ट वर्धमान है

Ans. B

Sol. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ge 1 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 2x & -1 \le x \le 0 \\ x-1 & x \le -1 \end{cases}$

Clearly it is non differentiable at $x = 0, -1$ and 1.

D06/1/053. Let f be a differentiable function satisfying $f'(x) = 2f(x) + 10 \ \forall \ x \in R$ and $f(0) = 0$, then the number of real roots of the equation $f(x) + 5 \sec^2 x = 0$ in $(0, 2\pi)$ is :

माना f एक अवकलनीय फलन है जो $f'(x) = 2f(x) + 10 \ \forall \ x \in R$ को संतुष्ट करता है तथा $f(0) = 0$ है, तब समीकरण $f(x) + 5 \sec^2 x = 0$ के $(0, 2\pi)$ में वास्तविक मूलों की संख्या होगी :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Ans. A

Sol. $\frac{dy}{dx} = 2y + 10$

$\int \frac{dy}{y+5} = 2\int dx$

$\ln(y + 5) = 2x + c$

$y = 5(e^{2x} - 1) \quad (\because c = \ln 5)$

$f(x) + 5 \sec^2 x = 0 \Rightarrow e^{2x} + \tan^2 x = 0$

D06/1/054. Let f(x) be a polynomial in x. The second derivative of $f(e^x)$ w.r.t. x is :

माना f(x), x का एक बहुपद है। तब x के सापेक्ष $f(e^x)$ का द्वितीय अवकलज होगा :

(A) $f''(e^x)e^x + f'(e^x)$ (B) $f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)\, e^{2x}$

(C) $f''(e^x)e^x + f'(e^x)e^{2x}$ (D) $f''(e^x)e^{2x} + e^x f'(e^x)$

Ans. D

Sol. Let $g(x) = f(e^x)$

$g'(x) = f'(e^x) \,.\, e^x$

$g''(x) = f''(e^x) \,.\, e^{2x} + f'(e^x)\, e^x$

D06/1/055. If f(x) is a function such that $f(x) + f''(x) = 0$ and $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$ and $g(3) = 8$, then $g(8) =$:

यदि f(x) एक फलन इस प्रकार है कि $f(x) + f''(x) = 0$ तथा $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$ और $g(3) = 8$ है, तब $g(8) =$:

(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 8

Ans. D

Sol. $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2 \Rightarrow g'(x) = 2f(x)\, f'(x) + 2f'(x)\, f''(x)$

or $g'(x) = 2f(x)\, f'(x) - 2f(x)\, f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c \Rightarrow g(8) = 8$

D06/1/056. Let f is twice differentiable on R such that f(0) = 1, f'(0) = 0 and f''(0) = –1, then for $a \in R$, $\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x =$

माना f, R पर द्विअवकलनीय इस प्रकार है कि f(0) = 1, f'(0) = 0 तथा f''(0) = –1, तब $a \in R$ के लिए $\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x =$

(A) e^{-a^2} (B) $e^{-\frac{a^2}{4}}$ (C) $e^{-\frac{a^2}{2}}$ (D) e^{-2a^2}

Ans. C

Sol. $\ell = \lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)-1}{\frac{1}{x}}\right)}$

Using L' Hospital's rule, we get

$\ell = e^{\frac{a^2}{2}f''(0)} = e^{-\frac{a^2}{2}}$

D06/1/057. Let $f_1(x) = e^x$ and $f_{n+1}(x) = e^{f_n(x)}$ for any $n \ge 1$, $n \in N$. Then for any fixed n, the value of $\frac{d}{dx}f_n(x)$ equals :

माना $f_1(x) = e^x$ तथा $f_{n+1}(x) = e^{f_n(x)}$ किसी $n \ge 1$, $n \in N$ के लिए हैं। तब किसी निश्चित n के लिए $\frac{d}{dx}f_n(x)$ का मान होगा :

(A) $f_n(x)$ (B) $f_n(x)\, f_{n-1}(x) \ldots\ldots f_2(x)\, f_1(x)$

(C) $f_n(x)\, f_{n-1}(x)$ (D) $f_n(x)\, f_{n-1}(x) \ldots\ldots f_2(x)\, f_1(x)e^x$

Ans. B

Sol. $\frac{d}{dx}f_n(x) = e^{f_{n-1}(x)}\frac{d}{dx}f_{n-1}(x) = f_n(x)\frac{d}{dx}f_{n-1}(x)$

$= f_n(x)\, f_{n-1}(x) \ldots\ldots f_2(x)\, f_1(x)$

D06/1/058. If f(x) is derivable at x = 2 such that f(2) = 2 and f′(2) = 4, then the value of $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\ell n\left(f\left(2+h^2\right)\right) - \ell n\left(f\left(2-h^2\right)\right)\right)$ is equal to :

यदि f(x), x = 2 पर अवकलनीय इस प्रकार है कि f(2) = 2 तथा f′(2) = 4 है, तब $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\ell n\left(f\left(2+h^2\right)\right) - \ell n\left(f\left(2-h^2\right)\right)\right)$ का मान होगा :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Ans. D

Sol. $\lim_{n\to 0}\frac{\ell n(f(2+h^2))-\ell n(f(2-h^2))}{h^2}$

Apply L' hospital rule

$$\lim_{n\to 0}\frac{\frac{2h\,f'(2+h^2)}{f(2+h^2)}+\frac{2h\,f'(2-h^2)}{f(2-h^2)}}{2h}=4$$

D06/1/059. Let f and g be differentiable functions on R (the set of all real numbers) such that $g(1) = 2 = g'(1)$ and $f'(0) = 4$. If $h(x) = f(2x\,g(x) + \cos \pi x - 3)$ then $h'(1)$ is equal to :

माना f तथा g, R (सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) पर अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $g(1) = 2 = g'(1)$ तथा $f'(0) = 4$ है। यदि $h(x) = f(2x\,g(x) + \cos \pi x - 3)$ तब $h'(1)$ बराबर है :

(A) 28 (B) 24 (C) 32 (D) 18

Ans. C

Sol. $h(x) = f(2x\,g(x) + \cos \pi x - 3)$

$h'(x) = f'(2x\,g(x) + \cos \pi x - 3)\,[2g(x) + 2xg'(x) - \pi \sin \pi x]$

$h'(1) = f'(2g(1) - 4)\,[2g(1) + 2g'(1)] = 32$

D06/1/060. If $f(x)=\frac{(x+1)^7\sqrt{1+x^2}}{(x^2-x+1)^6}$, then the value of $f'(0)$ is equal to :

यदि $f(x)=\frac{(x+1)^7\sqrt{1+x^2}}{(x^2-x+1)^6}$, तब $f'(0)$ का मान होगा :

(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 15

Ans. C

Sol. $f(x)=\frac{(x+1)^7\sqrt{1+x^2}}{(x^2-x+1)^6}$ $(f(0) = 1)$

$\ell n f(x) = 7\,\ell n(1 + x) + \frac{1}{2}\,\ell n\,(1 + x^2) - 6\ell n\,(x^2 - x + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{7}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{6(2x-1)}{x^2-x+1}$$

$f'(0) = 13$

D08/1/061. Let $f : R \to T$ be a function defined by $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 78x + 24$. Number of integers in the solutions set

of x satisfying the inequality $f(f(f(x)-2x^3)) \geq f(f(2x^3-f(x)))$ is :

माना फलन $f : R \to T$ परिभाषित है कि $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 78x + 24$ है। x के हल समुच्चय में असमिका $f(f(f(x)-2x^3)) \geq f(f(2x^3-f(x)))$ को संतुष्ट करने वाले पूर्णांकों की संख्या है :

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Ans. C

Sol. $f'(x) = 6x^2 - 42x + 78 \geq \frac{9}{2} \forall x$

$\Rightarrow$ f(x) is strictly increasing

Hence, $f(f(f(x)-2x^3)) \geq f(f(2x^3-f(x)))$

iff $f(f(x)-2x^3) \geq f(2x^3-f(x))$

iff $f(x)-2x^3 \geq 2x^3-f(x)$

iff $f(x) \geq 2x^3$

iff $21x^2 - 78x - 24 \leq 0$

iff $7x^2 - 26x - 8 \leq 0$

iff $x \in \left[-\frac{2}{7}, 4\right]$

D08/1/062. Consider the three linear equation with to X, Y, Z as :

(x) $X + Y + 2Z = 0$

(f(x)) $X + 3Y + x^2Z = 0$

(5x) $X + 6Y + Z = 0$

having non-trivial solution for X, Y, Z. The curve f(x) :

(A) is always increasing (B) is always decreasing

(C) has exactly one critical point (D) has three critical points

X, Y, Z में तीन रैखिक समीकरणों पर विचार कीजिए।

(x) $X + Y + 2Z = 0$

(f(x)) $X + 3Y + x^2Z = 0$

(5x) $X + 6Y + Z = 0$

अशून्य हल रखता है, तब वक्र f(x) :

(A) हमेशा वर्धमान (B) हमेशा ह्रासमान

(C) एक क्रांतिक बिन्दु है (D) तीन क्रांतिक बिन्दु हैं

Ans. A

Sol. Since a non-trivial solution exists,

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ f(x) & 3 & x^2 \\ 5x & 6 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $x(3 - 6x^2) - f(x)(-11) + 5x(x^2 - 6) = 0$

$\Rightarrow$ $11f(x) = 6x^3 - 3x - 5x^3 + 30x$

$$f(x) = \frac{x^3 + 27x}{11}$$

$$f'(x) = \frac{3}{11}\left(x^2 + 9\right) > 0$$

D08/1/063. If g(x) is twice differentiable real valued function satisfying $g''(x) - 3g'(x) > 3 \ \forall \ x \geq 0$ and $g'(0) = -1$, then $h(x) = g(x) + x \ ' \ x > 0$:

(A) strictly increasing (B) strictly decreasing (C) non monotonic (D) data insufficient

यदि g(x) एक द्विअवकलनीय वास्तविक मान फलन है जो $g''(x) - 3g'(x) > 3 \ \forall \ x \geq 0$ को संतुष्ट करता है तथा $g'(0) = -1$, तब $h(x) = g(x) + x \ ' \ x > 0$:

(A) निरंतर वर्धमान (B) निरंतर ह्रासमान (C) एकदिष्ट नहीं (D) जानकारी अपर्याप्त

Ans. A

Sol. $h(x) = g(x) + x$

$h'(x) = g'(x) + 1$

$\Rightarrow$ $g'(x) = h'(x) - 1$ $\Rightarrow$ $g''(x) = h''(x)$ $\Rightarrow$ $h''(x) - 3(h'(x) - 1) > 3$

$\Rightarrow$ $h''(x) - 3h'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}h'(x)\right) > 0$

Let $P(x) = e^{-3x}h'(x)$

$\Rightarrow$ $P'(x) > 0$

$\Rightarrow$ P(x) is an increasing function.

$P(0) = h'(0) = 0$

$\Rightarrow$ $P(x) > 0 \ \forall \ x > 0$ $\Rightarrow$ $h'(x) > 0 \ \forall \ x > 0$

$\Rightarrow$ h(x) is an increasing function $\forall \ x > 0$

D08/1/064. If a, b, c, d $\in$ R such that $\frac{a + 2c}{b + 3d} + \frac{4}{3} = 0$, then the equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ has :

(A) atleast one root in (–1,0) (B) atleast on root in (0,1)

(C) no root in (–1, 1) (D) no root in (0, 2)

यदि a, b, c, d $\in$ R इस प्रकार है कि $\frac{a+2c}{b+3d}+\frac{4}{3}=0$, तब समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के लिए :

(A) (–1,0) में कम से कम एक मूल
(B) (0,1) में कम से कम एक मूल
(C) (–1, 1) में कोई मूल नहीं
(D) (0, 2) में कोई मूल नहीं

Ans. B

Sol. $\frac{a+2c}{b+3d}+\frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow 3a + 4b + 6c + 12d = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+\frac{d}{1}=0$

Consider $f(x)=\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx$

Then f(0) = 0 = f(1)

f(x) satisfied the conditions of Rolle's theorem in [0, 1]

hence, $f'(x) = 0$ has at least one solution (0, 1)

D08/1/065. Let $x_1=\sqrt[7]{3}+\sqrt[7]{9}$ and $x_2=\sqrt[7]{5}+\sqrt[7]{7}$, then :

(A) $x_1 = x_2$
(B) $x_1 > x_2$
(C) $x_1 < x_2$
(D) none of these

माना $x_1=\sqrt[7]{3}+\sqrt[7]{9}$ तथा $x_2=\sqrt[7]{5}+\sqrt[7]{7}$, तब :

(A) $x_1 = x_2$
(B) $x_1 > x_2$
(C) $x_1 < x_2$
(D) इनमें से कोई नहीं

Ans. C

Sol. Let $f(x)=x^{\frac{1}{7}}$

Apply LMVT in [3,5], $f'(a_1)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}$

$\frac{1}{7}a_1^{-\frac{6}{7}}=\frac{f(5)-f(3)}{2}$, $a_1 \in (3,5)$

Again LMVT in [7,9]

$f'(a_2)=\frac{f(9)-f(7)}{7-9} \Rightarrow \frac{1}{7}a_2^{-\frac{6}{7}}=\frac{f(9)-f(7)}{2}$, $a_2 \in (7,9)$

$\frac{f'(a_1)}{f'(a_2)}=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{6}{7}}>1$

$f'(a_1) > f'(a_2) \Rightarrow f(5) - f(3) > f(9) - f(7) \Rightarrow f(5) + f(7) > f(3) + f(9)$

D08/1/066. If $f''(x) > 0, \forall x \in R, f'(3) = 0$ and $g(x) = f(\tan^2 x - 2\tan x + 4)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, then g(x) is increasing in :

(A) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ (D) none of these

यदि $f''(x) > 0, \forall x \in R, f'(3) = 0$ तथा $g(x) = f(\tan^2 x - 2\tan x + 4)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, तब g(x) वर्धमान होगा :

(A) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. D

Sol. $g'(x) = (f \forall((\tan x - 1)^2 + 3))\, 2(\tan x - 1)\sec^2 x$

Since $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ is increasing

So, $f'((\tan x - 1)^2 + 3) > f'(3) = 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

Also $(\tan x - 1) > 0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. So g(x) is increasing in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

D08/1/067. If $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \frac{1+\beta}{1-\beta}, \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ are roots of the cubic equation f(x) = 0 where α, β, γ are the roots of the cubic equation $3x^3 - 2x + 5 = 0$, then the number of negative real roots of the equation f(x) = 0 is :

यदि $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \frac{1+\beta}{1-\beta}, \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ समीकरण f(x) = 0 के मूल हैं, जहाँ α, β, γ समीकरण $3x^3 - 2x + 5 = 0$ के मूल हैं, तब समीकरण f(x) = 0 के ऋणात्मक वास्तविक मूलों की संख्या होगी :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Ans. B

Sol. $\frac{1+x}{1-x} = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$

$$H(y) = 3\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 - 2\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + 5 = 0$$

$H(y) = 3(y-1)^3 - 2(y-1)(y+1)^2 + 5(y+1)^3 = 0$

$H(y) = 3(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) - 2(y-1)(y^2 + 2y + 1) + 5(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 0$

$3(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) - 2(y^3 + y^2 - y - 1) + 5(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 0$

$H(y) = 3y^3 + 2y^2 + 13y + 2 = 0$
$H'(x) = 9x^2 + 4x + 13 \Rightarrow D < 0$
$H(x) > 0 \ \forall \ x > 0$
Hence It has one –ve real root.

D08/1/068. Let f, g be differentiable functions on the real line R with f(0) > g(0). Assume that the set M = {t ∈ R | f(t) = g(t)} is non-empty and that $f'(t) \geq g'(t)$ for all t ∈ M. Then which of the following is necessarily true ?

(A) if t ∈ M, then t < 0
(B) for any t ∈ M, $f'(t) > g'(t)$
(C) For any $t \notin M$, $f(t) > g(t)$
(D) None of these

माना f, g वास्तविक रेखा R पर अवकलनीय फलन हैं जहाँ f(0) > g(0) है। मान लीजिए समुच्चय M = {t ∈ R | f(t) = g(t)} अरिक्त समुच्चय है और t ∈ M के सभी मान के लिए $f'(t) \geq g'(t)$ है, तो निम्न में से कौनसा आवश्यक रूप से सही होगा ?

(A) यदि t ∈ M, तब t < 0
(B) किसी t ∈ M के लिए $f'(t) > g'(t)$
(C) किसी t ∉ m के लिए, f(t) > g(t)
(D) इनमें से कोई नहीं

Ans. D

Sol. Let $f(t) = (t+1)(t-1)^2, g(t) = 0$. Then f(0) = 1 > g(0).

The set $M = \{t \in \mathbb{R} : f(t) = g(t)\} = \left\{t \in \mathbb{R} : (t+1)(t-1)^2 = 0\right\} = \{-1, 1\}$

is not empty. $f'(t) = (t-1)^2 + 2(t+1)(t-1) = (t-1)(2t+1), g'(t) = 0$.

$f'(-1) = 2 > 0 = g'(-1), f'(1) = 0 = g'(1)$

f and g satisfy the conditions of the problem. However, neither of (A), (B), (C) is true.

D07/1/069. The point on the curve $xy^2 = 1$ nearest to origin is :

वक्र $xy^2 = 1$ के मूल बिन्दु के नजदीक का बिन्दु है :

(A) $\left(2^{-\frac{1}{3}}, \pm 2^{\frac{1}{6}}\right)$
(B) $\left(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{-\frac{1}{6}}\right)$
(C) $\left(2^{\frac{1}{3}}, \pm 2^{\frac{1}{6}}\right)$
(D) (1,1)

Ans. A

Sol. $S = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 0 \quad \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

D07/1/070. The minimum value of $(x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{x_1^2}{20} - \sqrt{(17 - x_2)(x_2 - 13)}\right)^2$ where $x_1 \in R^+$ and $x_2 \in (13, 17)$, is :

(A) $\left(5\sqrt{2}-2\right)^2$ (B) $\left(5\sqrt{2}-2\right)$ (C) $\left(5\sqrt{2}+2\right)^2$ (D) none of these

$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(\frac{x_1^2}{20}-\sqrt{\left(17-x_2\right)\left(x_2-13\right)}\right)^2$ का न्यूनतम मान होगा, जहाँ $x_1 \in R^+$ तथा $x_2 \in (13, 17)$ हैं :

(A) $\left(5\sqrt{2}-2\right)^2$ (B) $\left(5\sqrt{2}-2\right)$ (C) $\left(5\sqrt{2}+2\right)^2$ (D) none of these

Ans. A

Sol. The given expression resembles with $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$; where $y_1=\frac{x_1^2}{20}$ and $y_2=\sqrt{\left(17-x_2\right)\left(x_2-13\right)}$

Let us consider two points $P_1(x_1, y_1)$ & $P_2(x_2, y_2)$ lying on the curve $x^2 = 20y$ and $(x-15)^2+y^2=4$. If D be the distance between P_1 and P_2 then given expression represent D^2.

Now D has to be minimized as per the problem.

Since shortest distance between two curves always occur along the common normal, it implies that $P_1(x_1, y_1)$ lies on $x^2 = 20y$ such that the normal at this point passes through (15, 0).

Normal to parabola is $y-\frac{x_1^2}{20}=\frac{-10}{x_1}\left(x-x_1\right)$. It should pass through (15, 0)

$x_1^3+200x_1-3000=0 \Rightarrow x_1=10$ & $y_1=5$

$D=\sqrt{\left(10-15\right)^2+5^2}-2=5\sqrt{2}-2$

Minimum value of given expression is $\left(5\sqrt{2}-2\right)^2$

D07/1/071. Consider the following statements :

S-1 : A closed vessel tapers to a point both at its top E and its bottom F and is fixed with EF vertical. When the depth of the liquid in it is x cm, the volume of the liquid in it is $x^2(15-x)$ cu. cm.

S-2 : A horse runs along a circle with a speed of 20km/hr. A lantern is at the center of the circle. A fence is along the tangent to the circle at the point at which the horse starts. The speed with which the shadow of the horse moves along the fence at the moment when it covers $\left(\frac{1}{8}\right)^{th}$ of the circle is v km/hr.

Then the numerical value of v + EF is equal to :

निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

S-1 : एक बंद पात्र अपने शीर्ष E तथा F पर एक बिन्दु पर संकीर्ण होता है तथा EF ऊर्ध्वाधर है। जब तरल पदार्थ की गहराई x cm होती है, तो इसके अंदर तरल पदार्थ का आयतन $x^2(15-x)$ cu. cm है।

S-2 : एक घोड़ा 20 किमी./घंटा की गति से एक वृत्त पर दौड़ता है। वृत्त के केन्द्र में एक लालटेन है। जिस बिन्दु से घोड़ा चलना शुरू करता है, उस बिन्दु पर वृत्त के स्पर्श रेखा के साथ एक बाड़ है। जिस क्षण घोड़ा वृत्त का $\left(\frac{1}{8}\right)^{th}$ भाग तय कर लेता है तो बाड़ के अनुदिश घोड़े की छाया की चाल v km/hr है।

तो v + EF का संख्यात्मक मान होगा :

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60

Ans. C

Sol.

D07/1/072. Let θ be the angle of intersection of curves C and D. Let ϕ be acute the angle of intersection of curves E and F. If

$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, D : $y^2 = 16x$, E : $y = |x^2 - 1|$, F : $y = |x^2 - 3|$,

and $\theta = \frac{\pi}{2}$, then the value of $a^2 + 7 \tan\theta$ is equal to :

माना θ वक्र C तथा D का प्रतिच्छेदन कोण है। माना ϕ, वक्र E तथा F का न्यून प्रतिच्छेदन कोण है। यदि

$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, D : $y^2 = 16x$, E : $y = |x^2 - 1|$, F : $y = |x^2 - 3|$,

तथा $\theta = \frac{\pi}{2}$ है, तब $a^2 + 7 \tan\theta$ का मान होगा :

(A) $2 + 4\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2} - 2$ (C) $2 + 3\sqrt{2}$ (D) $3 + 4\sqrt{2}$

Ans. A

Sol.

T01/1/073. If $\frac{\sum_{r=1}^{8} \sin\left((2r-1)\frac{\pi}{36}\right)}{\prod_{k=0}^{6} \cos\left(2^k . \frac{\pi}{36}\right)} = 2^n \tan 140^\circ$, (where $n \in N$) then 'n' is :

यदि $\dfrac{\sum_{r=1}^{8}\sin\left((2r-1)\frac{\pi}{36}\right)}{\prod_{k=0}^{6}\cos\left(2^k.\frac{\pi}{36}\right)} = 2^n \tan 140^o$, (जहाँ $n \in N$) हो, तो 'n' का मान होगा :

(A) 8 (B) 5 (C) 7 (D) 6

Ans. D

Sol. $$\frac{\sum_{r=1}^{8}\sin\left((2r-1)\frac{\pi}{36}\right)}{\prod_{k=0}^{6}\cos\left(2^k\cdot\frac{\pi}{36}\right)} = \left(\frac{\sin\frac{8\pi}{36}\cdot\sin\frac{8\pi}{36}}{\sin\frac{\pi}{36}}\right)\left(\frac{2^7\sin\frac{\pi}{36}}{\sin 2^7\frac{\pi}{36}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2^7\sin 40^\circ\sin 40^\circ}{\sin\left(640^\circ\right)} = \frac{2^7\sin 40^\circ}{-\cos 10^\circ}$$

$$= -2^6\left[\frac{1-\cos 80^\circ}{\left(\cos 5^\circ-\sin 5^\circ\right)\left(\cos 5^\circ+\sin 5^\circ\right)}\right]$$

$$= -2^6\left(\frac{\cos 5^\circ-\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ+\sin 5^\circ}\right) = 2^6\left(\frac{\cos 5^\circ-\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ+\sin 5^\circ}\right)$$

$= -2^6 \tan 40^o = 2^6 \tan 140^o$

T01/1/074. If $\cos A = \cos B\ \cos C$ and $A + B + C = \pi$, then the value of $\cot B \cot C$ is :

यदि $\cos A = \cos B\ \cos C$ तथा $A + B + C = \pi$ हो, तो $\cot B \cot C$ का मान होगा :

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

Ans. D

Sol. $\cos A = \cos B \cos C$

$\Rightarrow \cos(180^o - (B + C)) = \cos B \cos C$

$\Rightarrow -\cos B \cos C + \sin B \sin C = \cos B \cos C$

$\Rightarrow -1 + \tan B \tan C = 1$ $\Rightarrow \cot B \cot C = \frac{1}{2}$

T01/1/075. If α,β are two acute angles such that $\alpha + \beta = \gamma$, where γ is a constant, then maximum value of $(\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\beta + \cos\beta)$ is :

यदि α,β दो न्यूनकोण इस प्रकार है कि $\alpha + \beta = \gamma$ जहाँ γ अचर हो, तो $(\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\beta + \cos\beta)$ का अधिकतम मान होगा :

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)$ (C) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)$ (D) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)$

Ans. B

Sol. $\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\beta + \cos\beta$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \le 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

T01/1/076. The number of integral value(s) of k for which the equation $\cos^2(\cos\theta) + \sin^2(\sin\theta) + \sin(\cos\theta) + \cos(\sin\theta)$ $= k$ has a solution in the interval $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, is :

अन्तराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में k के पूर्णांक मानों की संख्या जिसके लिये समीकरण $\cos^2(\cos\theta) + \sin^2(\sin\theta) + \sin(\cos\theta) + \cos(\sin\theta)$ $= k$ का हल है, होगी :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Ans. A

Sol. $\cos^2(\cos\theta) + \sin^2(\sin\theta) + \sin(\cos\theta) + \cos(\sin\theta)$

$= 1 - [\sin^2(\cos\theta) - \sin(\cos\theta)] + 1 - [\cos^2(\sin\theta) - \cos(\sin\theta)]$

$$= \frac{5}{2} - \left(\sin(\cos\theta) - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\cos(\sin\theta) - \frac{1}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ it is always in $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow$ no integral value of k.

ONE OR MORE THAN ONE CORRECT TYPE QUESTIONS

D05/2/077. Let $f(t,x) = \begin{cases}\cos(tx)+\sin(tx) & x \in [0,\pi] \\ \sin(tx)-\cos(tx) & x \in (\pi, 2\pi]\end{cases}$ where $t \in (0,10]$, then :

(A) sum of all possible values of 't' for which f(t,x) is continuous, is 50

(B) f(t,x) is continuous for all $t \in N$

(C) sum of all possible values of 't' for which f(t,x) is differentiable, is 55

(D) f(t,x) is not differentiable for all $t \in (0,10]$

माना $f(t,x) = \begin{cases} \cos(tx) + \sin(tx) & x \in [0,\pi] \\ \sin(tx) - \cos(tx) & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ जहाँ $t \in (0,10]$ हो, तो :

(A) 't' के सभी सम्भव का योगफल जिसके लिए f(t,x) संतत् है, 50 होगा

(B) सभी $t \in N$ के लिए f(t, x) संतत् होगा

(C) 't' के सभी सम्भव मानों का योगफल जिसके लिए f(t,x) अवकलनीय है, 55 होगा

(D) सभी $t \in (0,10]$ के लिए f(t, x) अवकलनीय नहीं होगा

Ans. AD

Sol. $f(t,x) = \begin{cases} \cos(tx) + \sin(tx) & x \in [0,\pi] \\ \sin(tx) - \cos(tx) & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$

continous at $x = \pi \Rightarrow \cos t + 0 = -\cos t\pi$

$\Rightarrow \cos t\pi = 0 \Rightarrow t = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{19}{2}\right\}$

$\Rightarrow \sum t = \frac{1+3+5+\ldots+19}{2} = 50$

$\because f(t,x)$ is continuous for $t \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\ldots, \frac{19}{2}\right\}$

Now $f'(t,x) = \begin{cases} (-\sin tx + \cos tx)t & x \in [0,\pi] \\ (\cos tx + \sin tx)t & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$

for $f(t,x)$ to be differentiable $2t\sin(tx) = 0$

at $x = \pi \quad 2t\sin(t\pi) = 0$

but for $t \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \frac{19}{2}\right\}$

$2t\sin(tx) \neq 0$

$\Rightarrow f(t,x)$ is not differentiable

D05/2/078. Consider $f(x) = \begin{cases} \min(x, x^2, x^3) & x \geq 0 \\ \max(x, x^2, x^{1/3}) & x < 0 \end{cases}$, then :

(A) $f(x)$ is discontinuous at atleast one point in R

(B) $f(x)$ is neither even nor odd function

(C) $f(x)$ is non derivable at exactly one point in R

(D) $f(x)$ is non derivable at exactly two points in R

माना $f(x) = \begin{cases} \min(x, x^2, x^3) & x \geq 0 \\ \max(x, x^2, x^{1/3}) & x < 0 \end{cases}$ हो, तो :

(A) $f(x)$, R में कम से कम एक बिन्दु पर असन्तत् हैं।

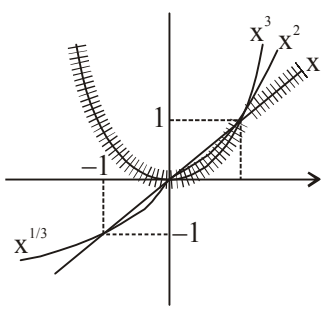
(B) $f(x)$, ना तो सम और ना ही विषम फलन होगा

(C) $f(x)$, R में ठीक एक बिन्दु पर अवकलनीय नहीं होगा

(D) $f(x)$, R में ठीक दो बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं होगा

Ans. BC

Sol. $f(x) \rightarrow \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$



(A) Clearly, $f(x)$ is continuous for all $x \in R$. Wrong.

(B) $f(x)$ is neither even, nor odd. Correct.

(C) $f(x)$ is non derivable at $x = 1$ only. Correct

(D) Wrong

D05/2/079. Assume that for every person the probability that he has exactly one child, exactly 2 children and exactly 3 children are $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$ respectively. The probability that a person will have 4 grand children can be

expressed as $\frac{p}{q}$ where p and q are relatively prime positive integers. Let f(x) = $\begin{cases} \frac{3x-x^2}{q^{1/7}} & ; \quad x<2 \\ [x-1] & ; \quad 2 \le x < 3 \\ x^2-8x+p-10 & ; \quad x \ge 3 \end{cases}$

then which of the following hold(s) good?

([.] denotes greatest integer function) :

(A) $q - 4p = 18$

(B) f(x) is differentiable at x = 2

(C) f(x) is continuous at x = 2

(D) f(x) is discontinuous at x = 3

मान लीजिए कि प्रत्येक व्यक्ति जिसका एक बच्चा है, दो बच्चे हैं तथा तीन बच्चे की हैं कि प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{4}$ है।

एक व्यक्ति के चार पोते/पोतियाँ होने की प्रायिकता को $\frac{p}{q}$ के रूप में दर्शाया जाता है जहाँ p तथा q अभाज्य धनात्मक संख्याएँ

हैं। माना f(x) = $\begin{cases} \frac{3x-x^2}{q^{1/7}} & ; \quad x<2 \\ [x-1] & ; \quad 2 \le x < 3 \\ x^2-8x+p-10 & ; \quad x \ge 3 \end{cases}$ है तब निम्न में से कौनसा/कौनसे विकल्प सत्य है/हैं ?

([.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है) :

(A) $q - 4p = 18$

(B) f(x), x = 2 पर अवकलनीय है

(C) f(x), x = 2 पर सतत् है

(D) f(x), x = 3 पर असतत् है

Ans. CD

Sol. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right\} + \frac{1}{4}\times\left\{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{27}{128}$

$f(2^+) = \lim_{x\to 2^+}[x-1] = 1$

$f(2^-) = \lim_{x\to 2^-}\frac{3x-x^2}{2} = 1$

$f(3^-) = \lim_{x\to 3^-}[x-1] = 1$

$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+}(x^2-8x+17) = 2$

D05/2/080. f(x) = |x – a|, g(x) = cos(πx), further

Let $h(x) = f(g(x))$ & $k(x) = g(f(x))$, then :

(A) Number of integral values of 'a' for which h(x) is non-derivable is 3

(B) Number of integral values of 'a' for which h(x) is non-derivable is 1

(C) k(x) is differentiable $\forall x \in R$

(D) k(x) is non-differentiable at x = a

$f(x) = |x - a|$, $g(x) = \cos(\pi x)$

माना $h(x) = f(g(x))$ & $k(x) = g(f(x))$, तब :

(A) 'a' के पूर्णांक मानों की संख्या जिनके लिए h(x) अन–अवकलनीय है, 3 है

(B) 'a' के पूर्णांक मानों की संख्या जिनके लिए h(x) अन–अवकलनीय है, 1 है

(C) k(x), $\forall x \in R$ के लिए अवकलनीय है

(D) k(x), x = a पर अन–अवकलनीय है

Ans. BC

Sol.

D05/2/081. f(x) and g(x) are 2 diff. functions and let $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

Further $f(x) - g(x) = (x - 1)(x - 2)^2 (x + 3)^3 (e^x - 1)$, then :

(A) H(x) is derivable at x = 3

(B) H(x) is non-derivable at x = 0

(C) No. of points where H(x) is non-derivable is 2

(D) No. of points where H(x) is non-derivable is 4

f(x) तथा g(x) दो अवकलनीय फलन हैं तथा माना $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

$f(x) - g(x) = (x - 1)(x - 2)^2 (x + 3)^3 (e^x - 1)$, तब :

(A) H(x), x = 3 पर अवकलनीय है

(B) H(x), x = 0 पर अन–अवकलनीय है

(C) बिन्दुओं की संख्या जिन पर H(x) अन–अवकलनीय है, 2 है

(D) बिन्दुओं की संख्या जिन पर H(x) अन–अवकलनीय है, 4 है

Ans. ABC

Sol.

D05/2/082. Let $f(x) = \pi^2 - 2\pi(\sin^{-1}x + 2\tan^{-1}x) + 8(\tan^{-1}x)(\sin^{-1}x)$, then :

(A) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = 4$

(B) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = -4$

(C) left hand derivative of f(x) at x = 1 is 0

(D) left hand derivative of f(x) at x = 1 does not exists

माना $f(x) = \pi^2 - 2\pi(\sin^{-1}x + 2\tan^{-1}x) + 8(\tan^{-1}x)(\sin^{-1}x)$, तो :

(A) $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = 4$

(B) $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = -4$

(C) f(x) का x = 1 पर बायाँ अवकलज 0 है

(D) f(x) का x = 1 पर बायाँ अवकलज विद्यमान नहीं है

Ans. AC

Sol.

D05/2/083. If $f(x) = \tan^{-1}(\text{sgn}(x^2 - \lambda x + 1))$ has exactly one point of discontinuity, then the value of λ can be :

यदि $f(x) = \tan^{-1}(\text{sgn}(x^2 - \lambda x + 1))$ का केवल एक असततता बिन्दु है, तब λ का मान हो सकता है :

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

Ans. CD

Sol. f(x) has exactly one point of discontinuity so that $\text{sgn}(x^2 - \lambda x + 1)$ is equal to zero for some values of λ.

$\therefore$ $D = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = \pm 2$

D05/2/084. Let $|f(x)| \le \sin^2 x, \forall\ x \in R$, then :

(A) f(x) is continuous at x = 0

(B) f(x) is differentiable at x = 0

(C) f(x) is continuous but not differentiable at x = 0

(D) f(0) = 0

माना $|f(x)| \le \sin^2 x, \forall\ x \in R$, तब :

(A) f(x), x = 0 पर सतत् है

(B) f(x), x = 0 पर अवकलनीय है

(C) f(x), x = 0 पर सतत् है लेकिन अवकलनीय नहीं

(D) f(0) = 0

Ans. ABD

Sol. given $|f(x)| \le \sin^2 x$

clearly $|f(0)| \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} |f(x)| = \left|\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x)\right| = 0$$

$$|f'(0)| = \left|\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x)-f(0)}{x}\right|$$

$$= \left|\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{x}\right| \le 0$$

D05/2/085. Identify the options having correct statement :

(A) $f(x) = \sqrt[3]{x^2|x|} - 1 - |x|$ is no where non-differentiable

(B) $\lim\limits_{x\to\infty} ((x+5)\tan^{-1}(x+1)) - ((x+1)\tan^{-1}(x+1)) = 2\pi$

(C) $f(x) = \sin(\ell n\,(x+\sqrt{x^2+1}))$ is an odd function

(D) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4x-x^3}$ is discontinuous at exactly one point

सही कथन वाले विकल्प को पहचानिए :

(A) $f(x) = \sqrt[3]{x^2|x|} - 1 - |x|$ कहीं पर भी अन–अवकलनीय नहीं है

(B) $\lim\limits_{x\to\infty} ((x+5)\tan^{-1}(x+1)) - ((x+1)\tan^{-1}(x+1)) = 2\pi$

(C) $f(x) = \sin(\ell n\,(x+\sqrt{x^2+1}))$ एक विषम फलन है

(D) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4x-x^3}$ केवल एक बिन्दु पर असतत् है

Ans. ABC

Sol. (A) $f(x) = \sqrt[3]{x^2|x|} - 1 - |x|$

But $x^2|x| = |x|^3$

so $f(x) = |x| - 1 - |x| \quad = -1$ is every where differentiable

so no where non-differentiable

(B) $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left[x(\tan^{-1}(x+1) - x\tan^{-1}(x+1)\right] + \left[5\tan^{-1}(x+1) - \tan^{-1}(x+1)\right]$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ 4\tan^{-1}(x+1) = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

(C) $f(-x) = \sin\left(\ell n\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \sin\left(\left(\ell n \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$

$$= \sin\left(-\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

$= -\sin\left(\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$

$= -f(x)$

so f(x) is an odd function

(D) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4x-x^3}$ is discontinuous at where denominator is zero, $4x - x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$

$\therefore$ A, B, C only correct

D05/2/086. Let $f : R \to R$ be a function, such that $|f(x)| \le x^{4n}$, $n \in N \ \forall \ x \in R$ then f(x) is :

(A) discontinuous at $x = 0$
(B) continuous at $x = 0$
(C) non differentiable at $x = 0$
(D) differentiable at $x = 0$

माना $f : R \to R$ एक फलन इस प्रकार है कि $|f(x)| \le x^{4n}$, $n \in N \ \forall \ x \in R$ तब f(x) है :

(A) $x = 0$ पर असतत्
(B) $x = 0$ पर सतत्
(C) $x = 0$ पर अन–अवकलनीय
(D) $x = 0$ पर अवकलनीय

Ans. BD

Sol. $|f(x)| \le x^{4n}$

$\Rightarrow \quad f(0) = 0$

$\lim\limits_{h\to 0}(-h^{4n}) \le \lim\limits_{h\to 0} f(0+h) \le \lim\limits_{h\to 0}(h)^{4n} \quad \Rightarrow \quad f(0+h) = 0$

$\lim\limits_{h\to 0}(-(-h)^{4n}) \le \lim\limits_{h\to 0} f(0-h) \le \lim\limits_{h\to 0}(-h)^{4n} \quad \Rightarrow \quad f(0-h) = 0$

$\Rightarrow \quad$ f(x) is continuous at $x = 0$

$f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 \quad \left[\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^{4n}}{h} \le \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} \le \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^{4n}}{h}\right]$

$\Rightarrow \quad$ f(x) is differentiable at $x = 0$

D05/2/087. Let $f(x) = [x]$ and $g(x) = 0$ when x is an integer and $g(x) = x^2$ when x is not an integer ([ ] is the greatest integer function) then :

(A) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ exists, but g(x) is not continuous at $x = 1$
(B) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ does not exist
(C) gof is continuous for all x
(D) fog is continuous for all x

माना $f(x) = [x]$ तथा $g(x) = 0$ जब x एक पूर्णांक है तथा $g(x) = x^2$ जब x एक पूर्णांक नहीं है ([ ] महत्तम पूर्णांक फलन है) तो :

(A) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ विद्यमान है, लेकिन g(x), $x = 1$ पर सतत् नहीं

(B) $\lim_{x\to 1} f(x)$ विद्यमान नहीं है

(C) gof, सभी x के लिए सतत् है

(D) fog सभी x के लिए सतत् है

Ans. ABC

Sol. $g(x) = 0 \quad x \in I$

$= x^2 \quad x \notin I$

$gof(x) = 0$ for $x \in R$

D05/2/088. If $f(x) = \begin{cases} |x|-3 & , x<1 \\ |x-2|+a & , x \ge 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-|x| & , x<2 \\ sgn(x)-b & , x \ge 2 \end{cases}$

If $h(x) = f(x) + g(x)$ is discontinuous at exactly one point, then which of the following are correct :

यदि $f(x) = \begin{cases} |x|-3 & , x<1 \\ |x-2|+a & , x \ge 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-|x| & , x<2 \\ sgn(x)-b & , x \ge 2 \end{cases}$

यदि $h(x) = f(x) + g(x)$ केवल एक बिन्दु पर असतत् है, तो निम्न में से कौनसे विकल्प सत्य हैं :

(A) $a = -3, b = 0$ (B) $a = -3, b = -1$ (C) $a = 2, b = 1$ (D) $a = 0, b = 1$

Ans. ABCD

Sol. $h(x) = -1 \qquad x < 1$

$= |x-2| + a + 2 - |x| \qquad 1 \le x < 2$

$= |x-2| + a + 1 - b \qquad x \ge 2$

if $h(x)$ is continuous at $x = 1$, then $a = -3$

If $h(x)$ is continuous at $x = 2$, then $b = 1$

D05/2/089. f(x) is differentiable function satisfying the relationship $f^2(x) + f^2(y) + 2(xy-1) = f^2(x+y)\ \forall\ x, y \in R$

Also $f(x) > 0\ \forall\ x \in R$ and $f(\sqrt{2}) = 2$. Then which of the following statement(s) is/are correct about f(x) :

(A) $[f(3)] = 3$ ([.] denotes greatest integer function) (B) $f(\sqrt{7}) = 3$

(C) f(x) is even (D) $f'(0) = 0$

यदि f(x) एक अवकलनीय फलन है जो संबंध $f^2(x) + f^2(y) + 2(xy-1) = f^2(x+y)\ \forall\ x, y \in R$ को संतुष्ट करता है।

$f(x) > 0\ \forall\ x \in R$ तथा $f(\sqrt{2}) = 2$ है। तो f(x) के संबंध में निम्न कथनों में से कौनसा/से कथन सही होगा/होंगे :

(A) $[f(3)] = 3$ ([.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है) (B) $f(\sqrt{7}) = 3$

(C) f(x) सम है (D) $f'(0) = 0$

Ans. ABCD

Sol. Differentiable w.r.t. 'x'

$2f(x)\,f'(x) + 2y = 2\,f(x+y)\,f'(x+y)$

put $x = 0$

$k + y = f'(y)\,f(y)$

integrate on both sides

$$ky + \frac{y^2}{2} = \frac{f^2(y)}{2} + C \qquad .....(1)$$

put $x = y = 0$ in given equation weget

$f^2(0) = 2$

$f(0) = \sqrt{2}$ as $(f(x) > 0)$

put $y = 0$ in (1)

$1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

also put $y = \sqrt{2}$

$$k\sqrt{2} + 1 = \frac{4}{2} - 1$$

$$k\sqrt{2} = 0$$

$k = 0$

$$\therefore \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{f^2(y)}{2} - 1$$

$f^2(y) = y^2 + 2$

$f(y) = \sqrt{y^2 + 2}$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

Hence we can answer

D05/2/090. Let [x] be the greatest integer function $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{4}\pi[x]}{[x]}$ is :

(A) not continuous at any point

(B) continuous at $\frac{3}{2}$

(C) discontinuous at 2

(D) differentiable at $\frac{4}{3}$

माना [x] एक महत्तम पूर्णांक फलन, $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{4}\pi[x]}{[x]}$ है तब :

(A) सभी बिन्दुओं पर असतत्

(B) $\frac{3}{2}$ पर सतत्

(C) 2 पर असतत्

(D) $\frac{4}{3}$ पर अवकलनीय

Ans. BCD

Sol. $f(x)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $1 \le x < 2$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{1}{2}$; $2 \le x < 3$

Hence f(x) is continuous at $\frac{3}{2}$, differentiable at $\frac{4}{3}$ & discontinuous at 2.

D05/2/091. If $f(x)=\begin{cases} x^m \cos\left(x-\frac{1}{x}\right) & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, then :

(A) $\forall m \in (-\infty, 0]$, f(x) is discontinuous at $x=0$

(B) $\forall m \in (0, \infty)$, f(x) is differentiable at $x=0$

(C) $\forall m \in (1, \infty)$, f(x) is differentiable at $x=0$

(D) $\forall m \in (0, 1]$, f(x) is continuous but not differentiable at $x=0$

यदि $f(x)=\begin{cases} x^m \cos\left(x-\frac{1}{x}\right) & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, तो :

(A) $\forall m \in (-\infty, 0]$, f(x), x = 0 पर असतत् है

(B) $\forall m \in (0, \infty)$, f(x), x = 0 पर अवकलनीय है

(C) $\forall m \in (1, \infty)$, f(x), x = 0 पर अवकलनीय है

(D) $\forall m \in (0, 1]$, f(x), x = 0 पर सतत् लेकिन अवकलनीय नहीं

Ans. ACD

Sol. If f(x) is continuous at $x=0$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$0 = \lim_{x\to 0} x^m \left(\cos x \cos\frac{1}{x} + \sin x \sin\frac{1}{x}\right)$$

$$0 = \lim_{x\to 0}\left(x^m \cos x \cos\frac{1}{x} + x^{m+1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin\frac{1}{x}\right)$$

true when $m > 0$

If f(x) is differentiable at $x = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \text{ exist} \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^m\left(\cosh\cos\frac{1}{h} + \sinh\sin\frac{1}{h}\right)-0}{h} \text{ exist}$$

possible when $m > 1$

D05/2/092. $f(x) = \left(\sin^{-1}x\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ if $x \neq 0$, $f(0) = 0$, f(x) is :

(A) continuous no where in $-1 \le x \le 1$
(B) continuous everywhere in $-1 \le x \le 1, x \neq 0$
(C) differentiable no where in $-1 \le x \le 1$
(D) differentiable everywhere $-1 < x < 1, x \neq 0$

$f(x) = \left(\sin^{-1}x\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ यदि $x \neq 0$, $f(0) = 0$, f(x) है :

(A) $-1 \le x \le 1$ में असतत्
(B) $-1 \le x \le 1, x \neq 0$ में सतत्
(C) $-1 \le x \le 1$ में अन–अवकलनीय
(D) $-1 < x < 1, x \neq 0$ में अवकलनीय

Ans. BD

Sol. Since $\sin^{-1}x$ and $\cos\frac{1}{x}$ are continuous & differentiable in $x \in [-1,1] - \{0\}$

Now at $x = 0$

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sin^{-1}(0-h)\right)^2\cos\left(\frac{-1}{h}\right)-0}{-h} = 0$$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sin^{-1}h\right)^2\cos\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h} = 0$$

Hence LHD = RHD

so f(x) is continuous & differentiable every where in $-1 \le x \le 1, x \ne 0$

D05/2/093. If $f(x) = \cos\left[\frac{\pi}{x}\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$; where [x] is the greatest integer function of x, then f(x) is continuous at :

(A) x = 0 (B) x = 1 (C) x = 2 (D) none of these

यदि $f(x) = \cos\left[\frac{\pi}{x}\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$; जहाँ [x], x का महत्तम पूर्णांक फलन है, तब f(x) सतत् है :

(A) x = 0 (B) x = 1 (C) x = 2 (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. BC

Sol.

D05/2/094. Let $g : [-2,2] \to R$ be defined as $g(x) = |x + 1| (|x| + |1 - x|)$. Then :

(A) g(x) is continuous for all $x \in [-2,2]$

(B) g(x) is not differentiable at 3 points in [–2,2]

(C) g(x) attains the least value equal to 0 for all $x \in [-2,2]$

(D) g(x) attains the greatest value equal to 9 for all $x \in [-2,2]$

माना $g : [-2,2] \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $g(x) = |x + 1| (|x| + |1 - x|)$. तब :

(A) g(x) $\forall$ $x \in [-2,2]$ के लिए सतत् है

(B) g(x), [–2,2] में तीन बिन्दुओं पर अन–अवकलनीय है

(C) g(x) $\forall$ [–2,2] में 0 के बराबर निम्नतम मान रखता है

(D) g(x) $\forall$ $x \in [-2,2]$ में 9 के बराबर अधिकतम मान रखता है

Ans. ABCD

Sol.

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)(2x-1) & ; \quad -2 \le x < -1 \\ -2(x-1)(x+1) & ; \quad -1 \le x < 0 \\ (x+1) & ; \quad 0 \le x < 1 \\ (x+1)(2x-1) & ; \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Now, verify alternatives.

D05/2/095. Let $f(x) = 2^{\log_2(\sin^{-1} x)} + 3^{\log_3(\cos^{-1} x)}$ then which of the following statement(s) is(are) correct ?

(A) f(x) is not an even function

(B) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{\pi}{2}$

(C) $f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$

(D) There exists some $c \in (-1,0)$ such that $f(c) = \frac{\pi}{2}$

माना $f(x) = 2^{\log_2(\sin^{-1}x)} + 3^{\log_3(\cos^{-1}x)}$ तब निम्न में से कौनसा/से कथन सही होगा/होंगे?

(A) f(x) एक सम फलन नहीं है

(B) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{\pi}{2}$

(C) $f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$

(D) कुछ $c \in (-1,0)$ इस प्रकार विद्यमान हैं कि $f(c) = \frac{\pi}{2}$

Ans. ABC

Sol. $f(x) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x,\ 0 < x < 1 = \frac{\pi}{2}$

D02/2/096. Mr. B has two fair 6-sided dice, one whose faces are numbered 1 to 6 and the second whose faces are numbered 3 to 8. Twice, he randomly picks one of dice (each dice equally likely) and rolls it. Given the sum of the resulting two rolls is 9. The probability he rolled same dice twice is $\frac{m}{n}$ where m and n are relatively prime positive integers. Let $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 2 \\ 2x - n + m & 2 \le x < 3 \\ x + m & x \ge 3 \end{cases}$, then which of the following is/are correct :

(A) $f\left(f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$

(B) $1 + f\left(f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$

(C) $f(f(f(2))) = (f(1))^{2013}$

(D) $\underbrace{f(f(f(f(.....f(4)))....)}_{1005 \text{ times}} = 2014$

Mr. B के पास दो न्याय 6 फलक वाले पासे हैं। उनमें से पहले पासे पर 1 से 6 अंकित हैं तथा दूसरे पासे पर 3 से 8 अंकित हैं। दो बार यादृच्छिक एक पासे का चयन करते हैं (प्रत्येक पासे का चयन समप्रायिक है) तथा उसे फेंकते हैं। यह दिया गया है कि दो

बार पासों को फेंकने पर योग 9 है तो समान पासे को दो बार फेंकने की प्रायिकता $\frac{m}{n}$ है जहाँ m तथा n धनात्मक सह–अभाज्य पूर्णांक हैं। माना $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<2 \\ 2x-n+m & 2\le x<3 \\ x+m & x\ge 3 \end{cases}$, तब निम्न में से कौनसा/से सत्य है/हैं :

(A) $f\left(f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$

(B) $1+f\left(f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$

(C) $f(f(f(2)))=(f(1))^{2013}$

(D) $\underbrace{f(f(f(f(.....f(4)))....)}_{1005 \text{ times}}=2014$

Ans. ABCD

Sol.

$1^{st}\ 2^{nd}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$	a
$2^{nd}1^{st}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$	b
$1^{st}1^{st}$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{36}$	c
$2^{nd}2^{nd}$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{36}$	d

$$\frac{c+d}{a+b+c+d}=\frac{2}{5}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

$$f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{3}{2}$$

$$ff\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{9}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=2$$

$$f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)=1$$

$$f\left(f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\right)=1$$

D02/2/097. A bag contains 17 markers with numbers 1 to 17. A marker is drawn at random and then replaced; a second marker is drawn then the probability that first number is even and second is odd, is p then value of $\left[\frac{1}{p}\right]$ is k.

Suppose f (x) = ax + b and g (x) = bx + a, where a and b are positive integers. If f(g(50) – g(f(50)) = 7k then the product (ab) can have the value equal to : (where [.] denote greatest integer function) :

एक थैले में 17 मार्कर है जिन पर अंक 1 से17 अंकित है। यदि एक मार्कर यादृच्छक रूप से निकाला जाता है तब वापस रखा जाता है, तथा एक मार्कर और निकाला जाता है तो इस बात की क्या प्रायिकता कि प्रथम मार्कर पर सम तथा द्वितीय मार्कर पर विषम अंकित है, P है, तो $\left[\frac{1}{p}\right]$ का मान k होगा। माना f (x) = ax + b और g (x) = bx + a, जहां a और b धनात्मक पूर्णांक है। यदि f(g(50) – g(f(50)) = 7k तब (ab) का मान हो सकता है : (जहाँ [.] महत्म पूर्णांक फलन है)

(A) 12 (B) 48 (C) 180 (D) 210

Ans. AD

Sol. $P=\frac{{}^{8}C_1}{{}^{17}C_1}\times\frac{{}^{9}C_1}{{}^{17}C_1}\Rightarrow\left[\frac{1}{P}\right]=4$

f(g(50)) – g(f(50)) = 28

$a^2 - b^2 + b - a = 28$

(a – b) (a + b – 1) = 28

(1) a – b = 5, a + b – 1 = 7 ⇒ ab = 12

(2) a – b = 1, a + b – 1 = 28 ⇒ ab = 210

D02/2/098. f(x) is an even periodic function with period 10. In [0, 5], $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<2\\ 3x^2-8 & 2\le x<4\\ 10x & 4\le x\le 5\end{cases}$. Then :

(A) f(–4) = 40

(B) $\frac{f(-13)-f(11)}{f(13)+f(-11)}=\frac{17}{21}$

(C) f (5) is not defined

(D) Range of f(x) is [0, 50]

f(x), [0,5] में एक समआवर्ती फलन है जिसका आवर्तकाल 10 है।

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0 \le x < 2 \\ 3x^2-8 & 2 \le x < 4 \\ 10x & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$, तब :

(A) $f(-4) = 40$

(B) $\dfrac{f(-13)-f(11)}{f(13)+f(-11)} = \dfrac{17}{21}$

(C) f (5) परिभाषित नहीं है

(D) f(x) का परिसर [0, 50] है

Ans. ABD

Sol. $f(-4) = f(4) = 40$

$f(-13) = f(13) = f(3) = 19$

$f(-11) = f(11) = f(1) = 2$

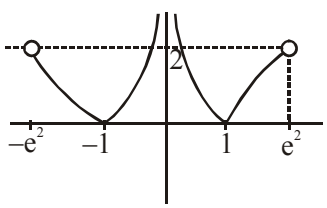
D02/2/099. $|\log_e|x|| = |k-1| - 3$ has four distinct roots then k satisfies (where $|x| < e^2$, $x \neq 0$) :

$|\log_e|x|| = |k-1| - 3$ के चार भिन्न मूल हैं तब k संतुष्ट करता है (जहाँ $|x| < e^2$, $x \neq 0$) :

(A) $(-4, -2)$ (B) $(4, 6)$ (C) (e^{-1}, e) (D) (e^{-2}, e^{-1})

Ans. AB

Sol.



$0 < |k-1| - 3 < 2$

$\Rightarrow k \in (-4, -2) \cup (4, 6)$

D02/2/100. Let f(x) be invertible function and let $f^{-1}(x)$ be its inverse. Let equation $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$ has two real roots α and β (with in domain of f(x)), then :

(A) $f(x) = x$ also have same two real roots

(B) $f^{-1}(x) = x$ also have same two real roots

(C) $f(x) = f^{-1}(x)$ also have same two real roots

(D) Area of triangle formed by $(0, 0)$, $(\alpha, f(\alpha))$, and $(\beta, f(\beta))$ is 1 unit

माना f(x) एक व्युत्क्रमणीय फलन है तथा $f^{-1}(x)$ व्युत्क्रम है। माना समीकरण $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$ के दो वास्तविक मूल a तथा b हैं (f(x) के प्रांत में), तब :

(A) f(x) = x के भी समान दो वास्तविक मूल हैं

(B) $f^{-1}(x) = x$ के भी समान दो वास्तविक मूल हैं

(C) $f(x) = f^{-1}(x)$ के भी समान दो वास्तविक मूल हैं

(D) (0, 0), (a, f(a)) (b, f(b)) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 1 इकाई है

Ans. ABC

Sol. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

if $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f^{-1}(x)$

if $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(f^{-1}(f(x))) = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

D02/2/101. The function $f(x) = \cos^{-1} + \cos^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2}\right)$, then :

(A) Range of f(x) is $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$

(B) Range of f(x) is $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

(C) f(x) is one-one for $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$

(D) f(x) is one-one for $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

फलन $f(x) = \cos^{-1} + \cos^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2}\right)$ है, तब :

(A) f(x) का परिसर $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$ है

(B) f(x) का परिसर $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ है

(C) f(x), $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ के लिए एकैकी है

(D) f(x), $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ के लिए एकैकी है

Ans. BC

Sol. $f(x) = \cos^{-1} x + \cos^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$

Let $x = \cos\theta$

$$f(x) = \cos^{-1}(\cos\theta) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos\theta) + \cos^{-1}\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

$= 2\theta - \frac{\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{3} < \theta \le \pi$

D02/2/102. If $h(x) = \left[\ln\frac{x}{e}\right] + \left[\ln\frac{e}{x}\right]$, where $[\cdot]$ denotes greatest integer function, then which of the following are true?

(A) range of h(x) is $\{-1, 0\}$
(B) If $h(x) = 0$, then x must be irrational
(C) If $h(x) = -1$, then x can be rational as well as irrational
(D) h(x) is periodic function

यदि $h(x) = \left[\ln\frac{x}{e}\right] + \left[\ln\frac{e}{x}\right]$, जहाँ $[\cdot]$ महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है, तब निम्न में से कौनसा/से सही है/हैं?

(A) h(x) का परिसर $\{-1, 0\}$ है
(B) यदि $h(x) = 0$, तब x अपरिमेय होगा
(C) यदि $h(x) = -1$, तब x परिमेय तथा अपरिमेय हो सकता है
(D) h(x) एक आवर्ती फलन है

Ans. AC

Sol. $h(x) = [\ell nx - 1] + [1 - \ell nx]$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{bmatrix} -1, & \ell nx - 1 \ne I \\ 0, & \ell nx - 1 = I \end{bmatrix}$$

D02/2/103. For the equation $\frac{e^{-x}}{1+x} = \lambda$ which of the following statement(s) is/are correct ?

(A) when $\lambda \in (0, \infty)$ equation has 2 real and distinct roots
(B) when $\lambda \in (-\infty, -e^2)$ equation has 2 real and distinct roots
(C) when $\lambda \in (0, \infty)$ equation has 1 real root
(D) when $\lambda \in (-e, 0)$ equation has no real root

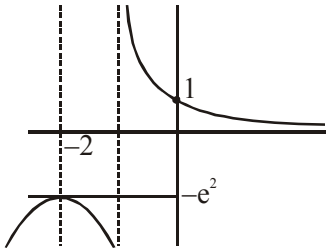
समीकरण $\frac{e^{-x}}{1+x} = \lambda$ के लिए निम्न में से कौनसा/से कथन सत्य है/हैं ?

(A) जब $\lambda \in (0, \infty)$ हो तो समीकरण के 2 वास्तविक तथा भिन्न मूल हैं
(B) जब $\lambda \in (-\infty, -e^2)$ हो तो समीकरण के 2 वास्तविक तथा भिन्न मूल हैं
(C) जब $\lambda \in (0, \infty)$ हो तो समीकरण का 1 वास्तविक मूल है
(D) जब $\lambda \in (-e, 0)$ हो तो समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है

Ans. BCD

Sol. $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+x}$

$f'(x)=\dfrac{-e^{-x}(x+2)}{1+x}$



D02/2/104. For $x \in R^+$, if x, [x], {x} are in harmonic progression then the value of x can not be equal to (where [.] greatest integer function, {.} fractional part function) :

$x \in R^+$ के लिए यदि x, [x], {x} हरात्मक श्रेणी में हैं तब x का मान नहीं हो सकता है (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को तथा {.} भिन्नात्मक भाग फलन को प्रदर्शित करता है) :

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{\pi}{8}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cot\dfrac{\pi}{8}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{\pi}{12}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cot\dfrac{\pi}{12}$

Ans. ACD

Sol. $[x]=\dfrac{2x\{x\}}{x+\{x\}}=\dfrac{2\{x\}([x]+\{x\})}{[x]+2\{x\}}$

$\Rightarrow \quad [x]^2=2\{x\}^2$

$\Rightarrow \quad x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad (\because x \in R^+)$

D02/2/105. The equation $||x-1|+a|=4$, $a \in R$, has :

(A) 3 distinct real roots for unique value of a.
(B) 4 distinct real roots for $a \in (-\infty, -4)$
(C) 2 distinct real roots for $|a|<4$
(D) no real roots for $a>4$

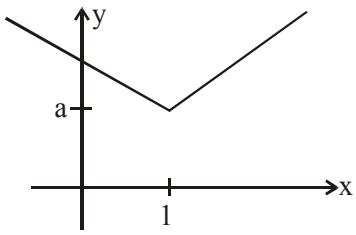
समीकरण $||x-1|+a|=4$, $a \in R$ के लिए :

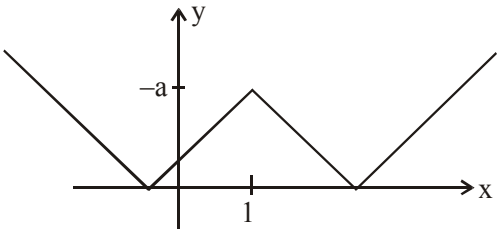
(A) a के अद्वितीय मान के लिए 3 भिन्न वास्तविक मूल होंगे
(B) $a \in (-\infty, -4)$ के लिए 4 भिन्न वास्तविक मूल होंगे
(C) $|a|<4$ के लिए 2 भिन्न वास्तविक मूल होंगे
(D) $a>4$ के लिए कोई वास्तविक मूल नहीं है

Ans. ABCD

Sol. $||x-1|+a|=4$

if $a>0$ if $a<0$





(A) if eq. has three distinct real root then $a < 0$ and $a = -4$

(B) 4 disinct roots for $a \in (-\infty, -4)$

(C) if $-4 < a < 4$, there are two distinct real roots

(D) if $a > 4$, no real root.

D02/2/106. Let $f_n(x) = (\sin x)^{1/n} + (\cos x)^{1/n}$, $x \in R$, then :

(A) $f_2(x) > 1$ for all $x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in I$

(B) $f_2(x) = 1$ for $x = 2k\pi$, $k \in I$

(C) $f_2(x) > f_3(x)$ for all $x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in I$

(D) $f_3(x) \geq f_5(x)$ for all $x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in I$

माना $f_n(x) = (\sin x)^{1/n} + (\cos x)^{1/n}$, $x \in R$ है, तब :

(A) $f_2(x) > 1 \ \forall \ x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in I$

(B) $f_2(x) = 1 \ \forall \ x = 2k\pi$, $k \in I$

(C) $f_2(x) > f_3(x) \ \forall \ x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in I$

(D) $f_3(x) \geq f_5(x) \ \forall \ x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in I$

Ans. AB

Sol. (A) $f_2(x) = (\sin x)^{1/2} + (\cos x)^{1/2}$

$\sqrt{\sin x} > \sin^2 x$; $\sqrt{\cos x} > \cos^2 x \Rightarrow \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$

(B) $f_2(x) = (\sin x)^{1/2} + (\cos x)^{1/2} \Rightarrow f_2(x) = 1$ at $x = 2k\pi$

(C) $f_2(x) = (\sin x)^{1/2} + (\cos x)^{1/2}$; $f_3(x) = (\sin x)^{1/3} + (\cos x)^{1/3}$

if $x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi/2)$ $0 < \sin x < 1$ and $0 < \cos x < 1$

As power increases, value of function decreases

$\Rightarrow f_2(x) < f_3(x)$

(D) $f_3(x) = (\sin x)^{1/3} + (\cos x)^{1/3}$

$f_5(x) = (\sin x)^{1/5} + (\cos x)^{1/5}$

$\Rightarrow f_3(x) < f_5(x)$

D02/2/107. Let us consider a function $f(x) = \sqrt{a\{x\}^2 + b\{x\}}$ (where $\{x\}$ denotes fractional part of x), then :

(A) If $a > 0 > b$ and $|b| > |a|$, then domain of f(x) is I.

(B) If $a < 0 < b$ and $|b| > |a|$, then domain of f(x) is R.

(C) If $a > 0$ and $b > 0$, then domain of f(x) is R.

(D) If $a < 0$ and $b < 0$, then domain of f(x) is I.

(I denote set of integers, R denote set of real numbers)

माना एक फलन $f(x) = \sqrt{a\{x\}^2 + b\{x\}}$ (जहाँ $\{x\}$, x के भिन्नात्मक भाग को दर्शाता है), तब :

(A) यदि $a > 0 > b$ तथा $|b| > |a|$, तब f(x) का प्रांत I होगा

(B) यदि $a < 0 < b$ तथा $|b| > |a|$, तब f(x) कबा प्रांत R होगा

(C) यदि $a > 0$ तथा $b > 0$, तब f(x) का प्रांत R होगा

(D) यदि $a < 0$ तथा $b < 0$, तब f(x) का प्रांत I होगा

(I पूर्णांक के समुच्चयों, R वास्तविक संख्याओं के समुच्चयों को दर्शाता है)

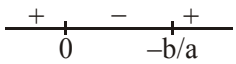
Ans. ABCD

Sol. Let $\{x\} = t \quad \forall\, t \in [0, 1)$

$at^2 + bt \geq 0$

$t(at + b) \geq 0$

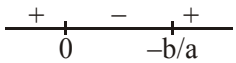
(A) $a > 0 > b$ $\quad \left|\frac{-b}{a}\right| > 1$



No solution

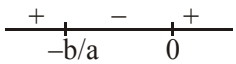
(B) $a < 0 < b$ $\quad \left|\frac{b}{a}\right| > 1$

$t(-at - b) \leq 0$



(C) $a > 0, b > 0$

$t(at + b) \geq 0$



(D) $a < 0, b < 0$

$t(-at - b) \leq 0$

$+ \quad - \quad +$

$-b/a \qquad 0$

D02/2/108. If $f(x) = e^{\sin^2 x} + \left[\left\{e^{40x} - \sin x + \cos x\right\}\right]$, then rang of f(x) contains the integers :

(Where {.} denotes fractional part fuction and [.] denotes greatest integer function)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) None of these

यदि $f(x) = e^{\sin^2 x} + \left[\left\{e^{40x} - \sin x + \cos x\right\}\right]$, है, तब f(x) के परिसर में पूर्णांक शामिल है :

(जहाँ {.} भिन्नात्मक फलन को दर्शाता है तथा [.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. BC

Sol. $e^{\sin^2 x} + \left[\left\{e^{40x} - \sin x + \cos x\right\}\right]$

$= e^{[0,1]} + \left[\left\{(0,\infty) - \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\right\}\right]$

$= e^{[0,1]} + \left[\left\{-\sqrt{2}, \infty\right\}\right]$

$= [1, e] + [[0, 1)]$

$= [1, e] + 0$

$= [1, e]$

D02/2/109. If $P = \text{minimum of } \dfrac{5}{2 + \sin x \cos x}$ and $t = \dfrac{1}{(P-1)^2} + \dfrac{1}{P^2} + \dfrac{1}{(P+1)^2} + \dfrac{1}{(P+2)^2} + ...\infty$, then :

यदि $P = \dfrac{5}{2 + \sin x \cos x}$ का न्यूनतम मान है तथा $t = \dfrac{1}{(P-1)^2} + \dfrac{1}{P^2} + \dfrac{1}{(P+1)^2} + \dfrac{1}{(P+2)^2} + ...\infty$, तब :

(A) $\dfrac{1}{P^2} + \dfrac{1}{(P+2)^2} + \dfrac{1}{(P+4)^2} + ...\infty = \dfrac{3t}{4}$

(B) $\dfrac{1}{(P+1)^2} + \dfrac{1}{(P+3)^2} + \dfrac{1}{(P+5)^2} + ...\infty = \dfrac{3t}{4}$

(C) $\dfrac{1}{(P+1)^2} + \dfrac{1}{(P+3)^2} + \dfrac{1}{(P+5)^2} + ...\infty = \dfrac{3t-4}{4}$

(D) $\frac{1}{P^2}+\frac{1}{(P+2)^2}+\frac{1}{(P+4)^2}+.....\infty=\frac{t}{4}$

Ans. CD

Sol. $\because$ $P=2$

$\therefore$ $t=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....\infty$

Now $\frac{1}{P^2}+\frac{1}{(P+2)^2}+\frac{1}{(P+4)^2}+....\infty=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+.....=\frac{t}{4}$

$\therefore$ $\frac{1}{(P-1)^2}+\frac{1}{(P+1)^2}+\frac{1}{(P+3)^2}+.....\infty=t-\frac{t}{4}=\frac{3t}{4}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{(P+1)^2}+\frac{1}{(P+3)^2}+\frac{1}{(P+5)^2}+.....\infty=\frac{3t}{4}-\frac{1}{(P-1)^2}=\frac{3t}{4}-1=\frac{3t-4}{4}$

D02/2/110. Let function f defined as $f(x)=\frac{2\{x\}^2+\{x\}-1}{2\{x\}^2-5\{x\}+2}$, where $\{x\}$ represent fractional part function.

(A) Domain of function f(x) is $R-\left\{\frac{1}{2},2\right\}$

(B) Domain of function f(x) is $R-\left\{n+\frac{1}{2}:n\in I\right\}$

(C) Range of function f(x) is $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$

(D) Range of function f(x) is $\left(-2,-\frac{1}{2}\right]-\{-1\}$

माना फलन f परिभाषित है कि $f(x)=\frac{2\{x\}^2+\{x\}-1}{2\{x\}^2-5\{x\}+2}$, जहां $\{x\}$ भिन्नात्मक भाग फलन को दर्शाता है

(A) फलन f(x) का प्रान्त $R-\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ है।

(B) फलन f(x) का प्रान्त $R-\left\{n+\frac{1}{2}:n\in I\right\}$ है।

(C) फलन f(x) का परिसर $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ है।

(D) फलन f(x) का परिसर $\left(-2,-\frac{1}{2}\right]-\{-1\}$ है।

Ans. BD

Sol. $f(x)=\frac{(2\{x\}-1)(\{x\}+1)}{(2\{x\}-1)(\{x\}+1)}=\frac{\{x\}+1}{\{x\}-1}\left(\{x\}\neq\frac{1}{2}\right)$

For domain of function $2\{x\}-1\neq 0$ and $\{x\}-2\neq 0$

$\Rightarrow \{x\}\neq\frac{1}{2}$ and $\{x\}\neq 2$

$\Rightarrow \{x\} \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \in R - \left\{n + \frac{1}{2}\right\}\ n \in Z$

For range

$\frac{\{x\}+1}{\{x\}-2} = y$ (let)

$\Rightarrow \{x\} + 1 = y(\{x\}-2)$

$\Rightarrow \{x\} = \frac{1+2y}{y-1}$

Now, $\because\ 0 \le \{x\} < 1 \Rightarrow 0 \le \frac{1+2y}{y-1} < 1$

$\frac{2y+1}{y-1} \ge 0$ and $\frac{2y+1}{y-1} < 1$

$\Rightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, \infty)$ and $\frac{y+2}{y-1} < 0$

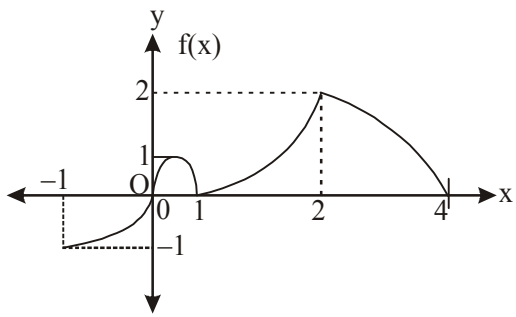
$\Rightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, \infty)$ and $y \in (-2, 1)$

$\Rightarrow y \in \left(-2, \frac{-1}{2}\right]$

also $\{x\} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow y \neq -1$

$\Rightarrow y \in \left(-2, \frac{-1}{2}\right] - \{-1\}$

D02/2/111. If graph of a function f(x) which is defined in [–1, 4] is shown in the adjacent figure then identify the correct statement(s) :



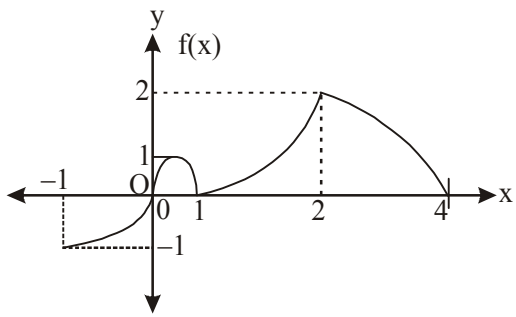
(A) domain of f(|x| – 1) is [–5, 5]

(B) range of f(|x| + 1) is [0,2]

(C) range of f(–|x|) is [–1, 0]

(D) domain of f(|x|) is [–3, 3]

यदि चित्रानुसार [–1, 4] में परिभाषित एक फलन का आरेख f(x) है, तो निम्न में से सत्य कथन/कथनों का चयन कीजिए:



(A) f(|x| – 1) का प्रांत [–5, 5]

(B) f(|x| + 1) का परिसर [0,2]

(C) f(–|x|) का परिसर [–1, 0]

(D) f(|x|) का प्रांत [–3, 3]

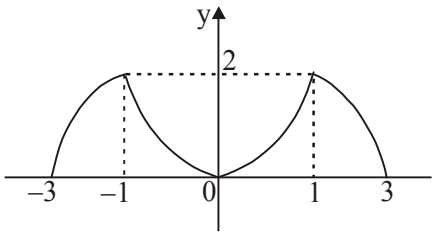
Ans. ABC

Sol. (A) $-1 \le |x| - 1 \le 4$

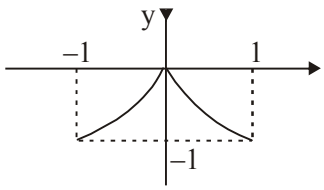
$\Rightarrow 0 \le |x| \le 5 \Rightarrow -5 \le x \le 5$

(B) f(|x| + 1)

Range of f(|x| +1) is [0, 2]



(C) Range of f (– |x|) is [–1,0]



(D) $-1 \le |x| \le 4$

$\Rightarrow x \in [-4, 4]$

D02/2/112. If f is a function satisfying $f(x-2)+f(x+2)=\sqrt{3}\ f(x)\ \forall\ x \in R$, then which of the following is/are always true :

यदि फलन f, $f(x-2)+f(x+2)=\sqrt{3}\ f(x)\ \forall\ x \in R$ को संतुष्ट करता है, तब निम्न में से कौनसा/से कथन सदैव सत्य है/हैं :

(A) $f(x-4)+f(x+8)=0$ (B) $f(x)-f(x+12)=0$

(C) $f(x-2)+f(x+4)=0$ (D) $f(x)-f(x+24)=0$

Ans. AD

Sol. $f(x-2)+f(x+2)=\sqrt{3}f(x)$ ...(1)

$\Rightarrow$ $f(x)+f(x+4)=\sqrt{3}\ f(x+2)$ ...(2)

also $f(x-4)+f(x)=\sqrt{3}\ f(x-2)$ ...(3)

equation (2) + (3) $\Rightarrow$ $f(x-4)+f(x+4)=f(x)$ ...(4) by using (1)

$\Rightarrow$ $f(x)+f(x+8)=f(x+4)$

$\Rightarrow$ $f(x-4)+f(x+8)=0$ by using (4)

$\Rightarrow$ $f(x+12)=-f(x)$

$\Rightarrow$ $f(x+24)=f(x)$

D02/2/113. If $f : R \to R$ be a function satisfying the functional rule $f(x+f(y))=f(x)+x+f(x-y);\ \forall\ x, y \in R$, then

यदि $f : R \to R$ एक फलन है, जो फलन नियम $f(x+f(y))=f(x)+x+f(x-y);\ \forall\ x, y \in R$ को संतुष्ट करता है, तो :

(A) $f(0)=0$ (B) $|f(1)+f(2)|=3$ (C) $|f(1)+f(2)|=5$ (D) $|f(1)+f(-1)|=2$

Ans. AB

Sol. $f(x+f(y))=f(x)+x+f(x-y)$ ....(1)

Put $y=0$ ($f(0)=\lambda$ say)

$f(x+\lambda)=2f(x)+x$ ....(2)

$x = -\lambda$ in(2)

$\lambda = 2f(-\lambda) - \lambda$

Put $y = -\lambda$ in (1)

$\Rightarrow f(x + \lambda) = f(x) + x + f(x + \lambda)$

$\Rightarrow f(x) = -x$

D03/2/114. $f(x) = \begin{cases} \sin^{-1}\sin x & x \in [-\pi, 0) \\ \tan^{-1}\tan x & x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$, then correct option(s) is/are :

(A) if $x \in [-\pi, 0]$, then $fof(x) = f(x)$

(B) if $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, then $fof(x) = x$

(C) if $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, then $fof(x) = x - \pi$

(D) if $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, then $fof(x) = \pi - x$

$f(x) = \begin{cases} \sin^{-1}\sin x & x \in [-\pi, 0) \\ \tan^{-1}\tan x & x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$, तो सही विकल्प है :

(A) यदि $x \in [-\pi, 0]$, तब $fof(x) = f(x)$

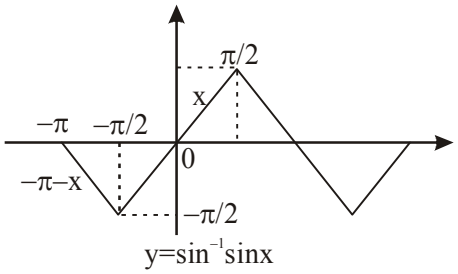
(B) यदि $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, तब $fof(x) = x$

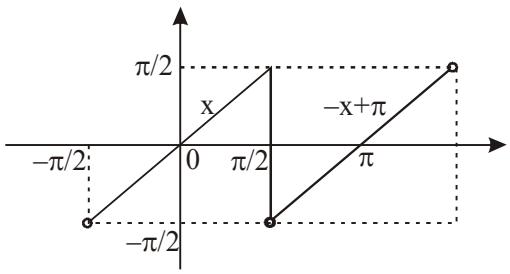
(C) यदि $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, तब $fof(x) = x - \pi$

(D) यदि $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, तब $fof(x) = \pi - x$

Ans. ABC

Sol.





$y = \tan^{-1}(\tan x)$

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & x \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \\ x & x \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \\ x & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -\pi + x & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

(A) for $x \in [-\pi, 0], f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$

$$fof = \begin{bmatrix} -\pi - f(x) & -\pi \le f(x) < -\frac{\pi}{2} \\ f(x) & -\frac{\pi}{2} \le f(x) < 0 \end{bmatrix}$$

since $f(x) = \sin^{-1}(\sin x) \notin \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow fof(x) = f(x)$

(B) for $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), f(x) = \tan^{-1}(\tan x) = x$

$\Rightarrow fof(x) = f(x)$

(C) for $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], f(x) = \tan^{-1}(\tan x) = -\pi + x$

$\Rightarrow fof(x) = -\pi + f(x), \frac{\pi}{2} < f(x) \le \pi$

since $f(x) \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow$ rejected

D03/2/115. The solution(s) of the equation $\cos^{-1} x = \tan^{-1}x$ satisfy :

समीकरण $\cos^{-1} x = \tan^{-1}x$ के हल संतुष्ट करेंगे :

(A) $x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(B) $x^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(C) $\sin\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(D) $\tan\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Ans. AC

Sol. $\cos^{-1}x = \tan^{-1}x \Rightarrow x \in [0, 1]$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \tan^{-1} x = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

D03/2/116. Consider the equation $\sin^{-1}\left(x^2 - 6x + \frac{17}{2}\right) + \cos^{-1} k = \frac{\pi}{2}$, then :

(A) the largest value of k for which equation has 2 distinct solution is 1

(B) the equation must have real root if $k \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

(C) the equation must have real root if $k \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

(D) the equation has unique solution if $k = -\frac{1}{2}$

समीकरण $\sin^{-1}\left(x^2 - 6x + \frac{17}{2}\right) + \cos^{-1} k = \frac{\pi}{2}$ पर विचार कीजिए, तो :

(A) k का अधिकतम मान 1 है जिसके लिए सभी दो भिन्न हल रखता है।

(B) समीकरण के वास्तविक मूल होंगे यदि $k \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

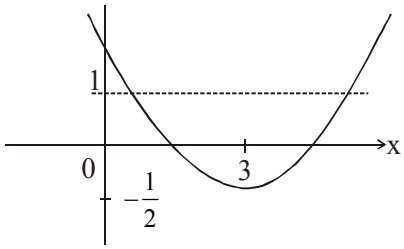
(C) समीकरण के वास्तविक मूल होंगे यदि $k \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

(D) समीकरण का अद्वितीय हल होगा यदि $k = -\frac{1}{2}$

Ans. ABD

Sol. $\sin^{-1}\left(x^2 - 6x + \frac{17}{2}\right) = \sin^{-1} k$

where $-1 \le k \le 1$



$y = x^2 - 6x + \frac{17}{2}$

D03/2/117. Mr. X stated that $\sin^{-1}(\sin(7\text{sgn}(R))) < 6 - 2\pi$, but he forget to state the condition for R, then :

(A) Mr. X is right if $R > 0$
(B) Mr. X is right if $R < 0$
(C) Mr. X is wrong if $R < 0$
(D) Mr. X is wrong if $R > 0$

श्रीमान X ने बताया कि $\sin^{-1}(\sin(7\text{sgn}(R))) < 6 - 2\pi$, है लेकिन R के लिये शर्त बताना भुल गये तो :

(A) श्रीमान X सत्य है यदि $R > 0$
(B) श्रीमान X सत्य है यदि $R < 0$
(C) श्रीमान X गलत है यदि $R < 0$
(D) श्रीमान X गलत है यदि $R > 0$

Ans. BD

Sol. If $R > 0$, then $\sin^{-1}(\sin(7\text{sgn}(R))) = \sin^{-1}(\sin 7)$

$\therefore\ 7 - 2\pi < 6 - 2\pi$

If $R < 0$, then $\sin^{-1}(\sin(-7)) = -(7 - 2\pi)$

$\therefore\ -7 + 2\pi < 6 - 2\pi$

D03/2/118. If $f(x) = \tan^{-1}(x^3 - x^2 + x) + \sin^{-1}(2x - 1)$ then which of the following is/are CORRECT :

(A) $f_{max} = \frac{3\pi}{4}$
(B) f_{min} is not defined
(C) domain of f(x) is [0, 2]
(D) f(x) is a bounded function

यदि $f(x) = \tan^{-1}(x^3 - x^2 + x) + \sin^{-1}(2x - 1)$ तो निम्न में से कौनसा/कौनसे सही है :

(A) $f_{max} = \frac{3\pi}{4}$

(B) f_{min} परिभाषित नहीं है

(C) f(x) का प्रांत [0, 2] है

(D) f(x) एक बंधित फलन है

Ans. AD

Sol. $f(x) = \tan^{-1}(x^3 - x^2 + x) + \sin^{-1}(2x - 1)$

$D_f = -1 \le 2x - 1 \le 1$

$0 \le x \le 1$ [0, 1]

$f_{max} = \tan^{-1}(1 - 1 + 1) + \sin^{-1} 1$

$= \frac{3\pi}{4}$

$f_{min} =$ defined

D03/2/119. Let $f_1(x) = \sin^{-1}(\cos(\sin^2 x))$, $f_2(x) = \cos^{-1}(\sin(\cos^2 x))$, $f_3(x) = \sin^{-1}(\cos(\cos^2 x))$, $f_4(x) = \cos^{-1}(\sin(\sin^2 x))$ then :

(A) $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = 2\pi - 2$

(B) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i f_i(x) = 0$

(C) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{\left[\frac{i}{3}\right]} f_i(x) = 0$ where [.] denote GIF

(D) $f_1(x) > f_2(x) \Rightarrow \cos 2x < 0$

माना $f_1(x) = \sin^{-1}(\cos(\sin^2 x))$, $f_2(x) = \cos^{-1}(\sin(\cos^2 x))$, $f_3(x) = \sin^{-1}(\cos(\cos^2 x))$, $f_4(x) = \cos^{-1}(\sin(\sin^2 x))$ है, तो :

(A) $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = 2\pi - 2$

(B) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i f_i(x) = 0$

(C) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{\left[\frac{i}{3}\right]} f_i(x) = 0$ जहाँ [.] महतम पूर्णांक फलन को दर्शाता है

(D) $f_1(x) > f_2(x) \Rightarrow \cos 2x < 0$

Ans. ABC

Sol. $f_1(x) = \sin^{-1}(\cos(\sin^2 x)) = \pi/2 - \cos^{-1}(\cos(\sin^2 x)) = \pi/2 - \sin^2 x.$

$f_2(x) = \cos^{-1}(\sin(\cos^2 x)) = \pi/2 - \cos^2 x.$

$f_3(x) = \sin^{-1}(\cos(\cos^2 x)) = \pi/2 - \cos^2 x.$

$f_4(x) = \cos^{-1}(\sin(\sin^2 x)) = \pi/2 - \sin^2 x.$

(A) $\sum_{i=1}^{4} f_i(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^2 x + \frac{\pi}{2} - \cos^2 x + \frac{\pi}{2} - \cos^2 x + \frac{\pi}{2} - \sin^2 x = 2\pi - 2$

(B),(C) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i f_i(x) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{\frac{i}{3}} f_i(x)$

$= -f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + f_4(x)$

$= -\left(\frac{\pi}{2} - \sin^2 x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos^2 x\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \cos^2 x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \sin^2 x\right) = 0$

(D) $f_1(x) > f_2(x)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \sin^2 x > \frac{\pi}{2} - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x > 0$

$\Rightarrow \cos 2x > 0$

D03/2/120. Number of solutions of the equation $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } x) = \sin x$ in $[-2\pi, 2\pi]$ is 'a' and number of solutions of $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } x) = \sqrt{\sin x}$ in the interval is 'b' then :

समीकरण $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } x) = \sin x$ के अंतराल $[-2\pi, 2\pi]$ में मूलों की संख्या 'a' है तथा $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } x) = \sqrt{\sin x}$ का इसी अंतराल में मानों की संख्या 'b' है तो :

(A) a = 4 (B) a = 0 (C) b = 2 (D) b = 4

Ans. BD

Sol.

D04/2/121. Let A_n be the area outside a regular n sided polygon of side length 2 but inside its circumscribed circle, let B_n be the area inside this polygon but outside its inscribed circle. If $\theta = \frac{\pi}{n}$:

माना A_n भुजा की लम्बाई 2 वाले एक नियमित n भुजा वाले एक नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल है, लेकिन इसके परिबद्ध वृत्त के अंदर है, मान लीजिए B_n इस बहुभुज के अंदर लेकिन उत्कीर्ण वृत्त के बाहर का क्षेत्रफल है। यदि $\theta = \frac{\pi}{n}$ तब :

(A) $A_n = \pi \text{cosec}^2\theta - n\cot\theta$ (B) $B_n = n\cot\theta - \pi\cot^2\theta$

(C) $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = 2$ (D) $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$

Ans. ABC

Sol. $r\sin\frac{\pi}{n}=1$

$$r=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$A_n=\left[\frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\pi}\left(\pi r^2\right)-\frac{1}{2}\times 2\times r\cos\frac{A}{n}\right]\times n$$

$$=\left[\frac{\pi}{n}r^2-r\cos\frac{\pi}{n}\right]\times n$$

$$A_n\Rightarrow\left(\frac{\pi}{n}\times\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}}-\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)\times n$$

$$R=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$B_n=\left[\frac{1}{2}\times 2\times R\cos\frac{\pi}{n}-\frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\pi}\left(\pi R^2\right)\right]\times n$$

$$B_r=\left[\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}-\frac{1}{n}\pi\times\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right]\times n$$

D04/2/122. Let $f:R\to R$; $f(x)=\begin{cases}(-1)^n & \text{if } x=\frac{1}{2^{2^n}} \quad , \quad n=1,2,3.....\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

then identify the correct statement(s) :

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

(B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ does not exist

(C) $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x) = 0$ (D) $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x)$ does not exist

माना $f : R \to R$; $f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{if } x = \frac{1}{2^{2^n}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, $n = 1, 2, 3.....$

तब सही कथन/कथनों का चुनाव कीजिए :

(A) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (B) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ विद्यमान नहीं है

(C) $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x) = 0$ (D) $\lim_{x\to 0} f(x)f(2x)$ विद्यमान नहीं है

Ans. BC

Sol. If $x \neq \frac{1}{2^{2^n}}$ then $f(x) = 0$ but if $x = \frac{1}{2^{2^n}}$ then $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$, hence does not exist

Also if $x = \frac{1}{2^{2^n}}$ then $2x \neq \frac{1}{2^{2^n}} \Rightarrow f(2x) = 0$

D04/2/123. If $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax+2}{\sqrt{4+x^2}}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2+1}} = L$, where $a \geq 0$ & L is finite number, then :

यदि $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax+2}{\sqrt{4+x^2}}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2+1}} = L$, जहाँ $a \geq 0$ तथा L एक परिमित संख्या है, तब :

(A) $a = 0, L = 1$ (B) $a = 1, L = e^2$ (C) $0 < a < 1, L = 0$ (D) $0 \leq a < 1, L = 0$

Ans. ABC

Sol. (A) for $a = 0$

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\right)^{\frac{1}{x^2+1}} \qquad (0^o \text{ from})$$

$$\log L = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}\log\left(\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\right)$$

$$\log L = \lim_{x\to\infty}\frac{\log 2 - \frac{1}{2}\log\left(4+x^2\right)}{x^2+1}\left(\frac{0}{0}\text{ form}\right)$$